

Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd

Abteilung: Mathematik

Semester: Sommersemester 2024

Prüfer*innen: Prof. Dr. Saskia Schreiter und Akad. Oberrat Lukas Hieber

Bachelorarbeit

Abgabe: Schwäbisch Gmünd, 15. Juli 2024

Fußball trifft auf Mathematik

**Konzept für eine Unterrichtseinheit zur Vermittlung von
Wahrscheinlichkeit und Zufall durch Bezug zur direkten
Lebensrealität von Schüler*innen**

Vorgelegt von:

Name: Dustin Morscher

Studiengang: Bachelor Lehramt Sekundarstufe I

Fächerkombination: Mathematik und Ökonomie

Fachsemester: 6

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	1
2.	Verortung der Unterrichtseinheit im Bildungsplan	3
2.1	Einführung Bildungsplan: Leitgedanken zum Kompetenzerwerb	3
2.2	Prozessbezogene Kompetenzen	5
2.3	Inhaltsbezogene Kompetenzen/Leitideen	7
3	Fachwissenschaftliche Betrachtung der mathematischen Unterrichtseinheit	11
3.1	Wahrscheinlichkeitsaussagen in alltäglichen Situationen.....	11
3.2	Zufallsexperiment.....	13
3.3	Geeignete Darstellungsformen von Daten	14
3.4	Mögliche und günstige Ergebnisse	15
3.5	Laplace-Experimente und Gegenereignisse	16
3.6	Gesetz der großen Zahl	18
4	Didaktisches Vorgehen.....	20
4.1	Fußball trifft auf Mathematik – didaktische Prinzipien und Relevanz von Aufgabenstellung aus der Lebensrealität von Schüler*innen.....	20
4.2	Methodisches Vorgehen.....	23
4.3	Unterrichtsskizze 1: inhaltsbezogene Unterkompetenzen 10 bis 13 ..	23
4.3.1	Allgemeines und Lernziele	23
4.3.2	Einstieg	24
4.3.3	Erarbeitung 1.....	25
4.3.4	Ergebnissicherung.....	26
4.3.5	Erarbeitung 2.....	29
4.3.6	Abschluss	31
4.4	Unterrichtsskizze 2: inhaltsbezogene Unterkompetenz 14.....	32
4.4.1	Allgemeines und Lernziele	32

4.4.2 Einstieg und Ergebnissicherung	32
4.4.3 Erarbeitung	34
4.4.4 Ergebnissicherung	36
4.4.5 Abschluss	37
4.5 Unterrichtsskizze 3: inhaltsbezogene Unterkompetenzen 15 und 17. 37	
4.5.1 Allgemeines und Lernziele	37
4.5.2 Einstieg	38
4.5.3 Erarbeitung 1	40
4.5.4 Ergebnissicherung 1	41
4.5.5 Erarbeitung 2	43
4.5.6 Abschluss	45
5 Fazit	46
Literaturverzeichnis	48
Abbildungsverzeichnis	50
Anhang	51
Eigenständigkeitserklärung	63

1. Einleitung

Kaum eine Diskussion wird unter Fußballfans weltweit so emotional geführt wie die Diskussion, die beantworten soll, welche/welcher der Fußballspieler*innen die/der Beste aller Zeiten ist. Wird dieser Fragestellung nachgegangen, werden von den Diskutierenden unterschiedliche Statistiken wie die Anzahl der gewonnenen Titel, Tore und sämtliche Quoten herangezogen. Wenn auch die Frage nicht final beantwortet werden kann, wer der/die beste Fußballspieler*in aller Zeiten ist, wird in der Auseinandersetzung klar, dass nahezu alles, was auf dem Spielfeld passiert in Zahlen messbar ist und somit direkten Bezug zur Mathematik hat. Fußball und Mathematik – eine Verbindung, welche auch im Unterrichtsalltag mit eingebunden werden kann. Bestärkt durch die im Sommer 2024 in Deutschland stattfindende Fußball-Europameisterschaft mit ausverkauften Stadien und bis zur Kapazitätsgrenze ausgereizten Fanmeilen gibt es keinen Zweifel daran, dass der Fußball nach wie vor Volkssport Nummer 1 über alle Altersgruppen hinweg, auch bei Schüler*innen der Sekundarstufe I ist (vgl. Deutscher Olympischer Sportbund (DOSB) 2023, S. 5).

Erkenntnisse der TIMSS-Studie (Trends in International Mathematics and Science Study) von 2015 zeigen, dass Mathematik oft als eines der unbeliebteren Schulfächern betrachtet wird. Das hat unter anderem den Grund, dass neben der hohen Schwierigkeit und Komplexität die Unterrichtsmethoden ohne Bezug zu realen Anwendungsmöglichkeiten wahrgenommen werden. Genau um diesen Faktor, welcher zu einer hohen gefühlten Frustration in Mathematik führt auszuhebeln, wird gemäß dem Lebenssituationsansatz im Rahmen des Berliner Modells die Lebensrealität der Schüler*innen in den Unterricht miteinbezogen (vgl. Peterßen 2004, S. 54). Das hier vorliegende Konzept für eine Unterrichtseinheit im Fach Mathematik wurde folglich gemäß dem Berliner Modell in Zusammenhang zum Fußball als Sportart erstellt. Das Konzept orientiert sich in den zu vermittelnden Kompetenzen an dem seit 2016 geltenden Bildungsplan für das Fach Mathematik in der Sekundarstufe I der Klassen 7/8/9 in Baden-Württemberg. Es wird ein tiefgreifender Kompetenzerwerb unter hohen motivationalen Anreizen innerhalb der inhaltsbezogenen Kompetenz „Daten und Zufall“ im Bereich der Unterkompetenz „Wahrscheinlichkeiten verstehen und berechnen“ angestrebt (vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2016, S. 43). Die Konzipierung der

Unterrichtseinheit, welche mehrere Unterrichtsstunden beinhaltet, wird literaturgestützt erstellt. Zudem wurden eigene Arbeitsmaterialien angefertigt, welche in der Unterrichtsgestaltung eine tragende Säule darstellen.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Forschungsfrage, wie die Leitidee „Daten und Zufall“ aus dem baden-württembergischen Mathematik-Bildungsplan für die Klassenstufen 7/8/9 der Sekundarstufe I durch fußballspezifische Inhalte konkretisiert werden, um eine lebensweltbezogene Unterrichtseinheit für Schüler*innen zu gestalten.

Zu Beginn wird die Unterrichtseinheit im Bildungsplan verortet. Es wird in den grundsätzlichen Aufbau eingeführt und die für die Unterrichtseinheit relevanten Aspekte des Bildungsplans erläutert. Im Anschluss werden die Inhalte, welche in der Unterrichtseinheit thematisiert werden, aus einer fachmathematischen Perspektive beleuchtet. Die Inhalte werden in der fachwissenschaftlichen Betrachtung detaillierter analysiert als es der spätere Kompetenzerwerb der Schüler*innen durch die Unterrichtseinheit vorsieht. Im Anschluss an die fachwissenschaftliche Betrachtung werden didaktische Prinzipien der Unterrichtseinheit unter besonderem Bezug zum Berliner Modell erläutert, bevor die einzelnen Unterrichtsstunden skizziert werden. Bei der Skizzierung wird detailliert auf die Lernziele, die Arbeitsmaterialien, den Unterrichtsablauf und die Tätigkeiten der Lehrkraft und der Schüler*innen eingegangen und das Vorgehen durch didaktische Kommentare begründet. Abschließend wird ein Fazit, resultierend aus dem Schreibprozess, inklusive Anmerkungen weiteren Forschungsbedarfs gezogen.

2. Verortung der Unterrichtseinheit im Bildungsplan

2.1 Einführung Bildungsplan: Leitgedanken zum Kompetenzerwerb

Die vorliegende Konzipierung einer Unterrichtseinheit bezieht sich auf den seit 2016 in Baden-Württemberg geltenden Bildungsplan für die Sekundarstufe I im Fach Mathematik für die Klassenstufen 7/8/9. Der Bildungsplan ist in drei Gruppen nach Klassenstufen (5/6, 7/8/9 und 10) aufgeteilt und wie folgt gleich aufgebaut. Einleitend sind im Bildungsplan Leitgedanken zum Kompetenzerwerb formuliert, welche den Bildungswert des Fachs Mathematik, Informationen über die zu erwerbenden Kompetenzen und didaktische Hinweise für Lehrkräfte beinhalten. Die Mathematik gilt als „[...] zentrale kulturelle und zivilisatorische Errungenschaft“ (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2016, S. 3), die bei der Bewältigung unterschiedlicher Lebenssituationen unterstützt. Neben der Erkenntnis über innermathematische Inhalte trägt die Mathematik auch zur Entwicklung der Persönlichkeit der Schüler*innen bei. Durch die Konfrontation mit Problematiken, für deren Lösung das bisherige Wissen nicht ausreicht, braucht es präzise Denk- und Lösungsansätze und die Fähigkeit diese entsprechend zu formulieren. Die Bewältigung dieser Herausforderungen führen zur Entwicklung eines positiven Selbstkonzepts und stärken die Selbstregulation (vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2016, S. 3).

Das Fach Mathematik leistet auch einen Beitrag zu den Leitperspektiven „Bildung für nachhaltige Entwicklung“, „Bildung für Toleranz und Akzeptanz von Vielfalt“, „Prävention und Gesundheitsförderung“, „berufliche Orientierung“, „Medienbildung“ und „Verbraucherbildung“. Durch gezielte Aufgabenstellungen, beispielsweise im Rahmen der prozessbezogenen Kompetenz „Modellieren“ ist die Mathematik ein vielseitiges Fach, das die innerfachlichen Herausforderungen so nutzen kann, dass zur Gesamtheit der Leitperspektiven beigetragen werden kann. Die Relevanz der Leitperspektiven wird dadurch begründet, dass die Schüler*innen zu mündigen Bürger*innen heranreifen sollen. In einer verstärkt technologisierten Welt mit starken dynamischen Entwicklungen ist die Mathematik mit ihrem Beitrag zu den Leitperspektiven eine tragende Säule im Bildungssystem und übertragend in der Gesellschaft (vgl. ebd., S. 4f.). Folglich ist es Aufgabe des Mathematikunterrichts, Kompetenzen so zu entwickeln, dass das mathematische Wissen funktional und unter Alltagsbezug eingesetzt werden kann.

Es wird, wie in Abbildung 1 dargestellt, zwischen prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen unterschieden. Während prozessbezogene Kompetenzen typische mathematische Tätigkeiten beinhalten, sind die inhaltsbezogenen Kompetenzen – in der Mathematik auch „Leitideen“ genannt, zentrale Ideen der Mathematik und beschreiben die zu erwerbenden fachlichen Kompetenzen. Die fünf Leitideen werden durch die fünf prozessbezogenen Kompetenzen in Abhängigkeit der drei Anforderungsbereiche erarbeitet (vgl. ebd., S. 5f.). „Die Charakterisierung der drei Anforderungsbereiche kann vereinfachend beschrieben werden durch Reproduzieren (I), Zusammenhänge herstellen (II) und Verallgemeinern und Reflektieren (III)“ (ebd., S. 5)

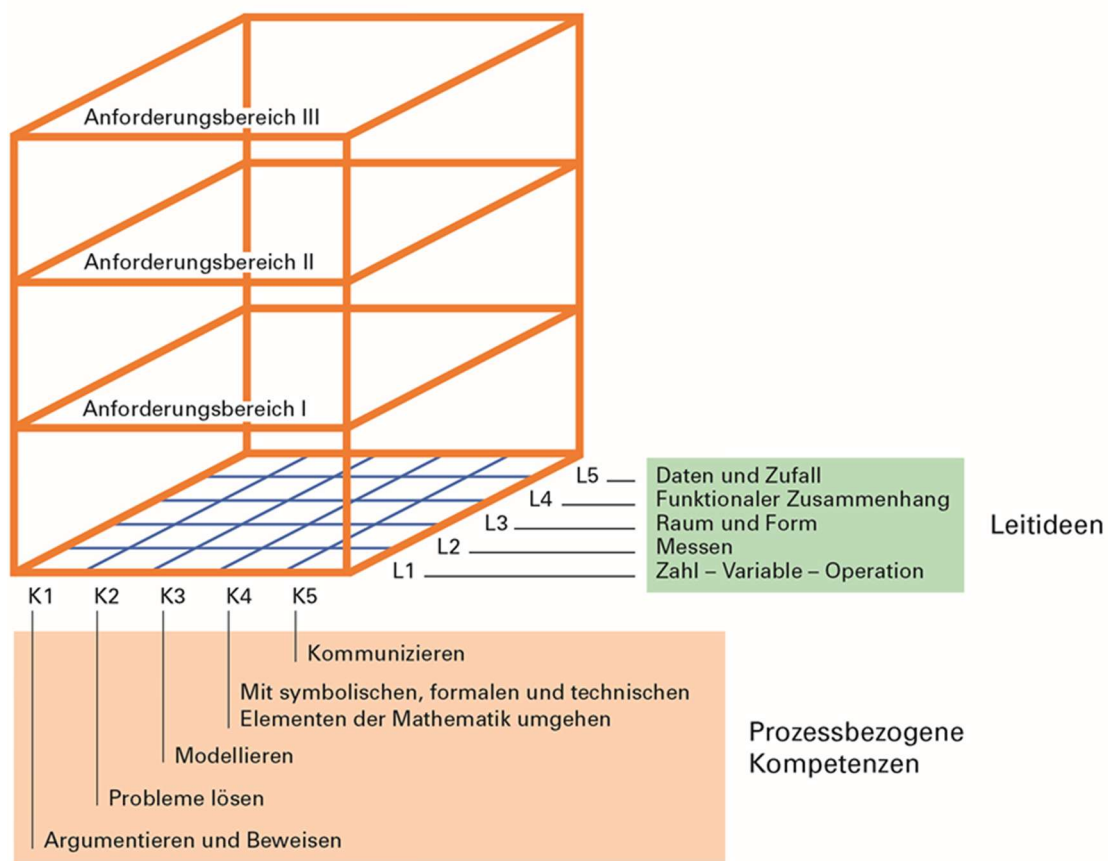


Abbildung 1: Zusammenhang zwischen prozessbezogenen Kompetenzen, Leitideen (inhaltsbezogenen Kompetenzen) und Anforderungsbereichen (© Landesinstitut für Schulentwicklung) (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2016, S. 6)

Die drei Anforderungsbereiche stehen in Zusammenhang mit den Operatoren, da diese gleich systematisiert sind. Operatoren sind handlungsleitende Verben, die das mathematische Handeln beschreiben. Auch wenn die Anforderungsbereiche und die damit verbundenen Operatoren den Schwierigkeitsgrad einer Tätigkeit beschreiben, stehen diese in nicht in direktem Zusammenhang mit den

Niveaustufen G, M und E, wenn auch mit steigendem Niveau verstärkt Operatoren höherer Anforderungsbereiche in den Leitideen genannt werden (vgl. ebd. S. 50f.).

2.2 Prozessbezogene Kompetenzen

Die fünf prozessbezogenen Kompetenzen sind typische Tätigkeiten der Mathematik, die zum ganzheitlichen Erwerb der inhaltsbezogenen Kompetenzen benötigt werden. Die erste prozessbezogene Kompetenz ist das „Argumentieren und Beweisen“. Sie ist in die drei Bestandteile „Fragen stellen und Vermutungen begründet äußern“, „mathematische Argumentationsstrukturen nutzen“ und „mathematische Argumentationen, wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise nachvollziehen und entwickeln“ aufgegliedert. Besonders die Kompetenzen „mathematische Argumentationsstrukturen nutzen“ und „mathematische Argumentationen, wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise nachvollziehen und entwickeln“ finden aufgrund der erhöhten Komplexität einzelner mathematischer Prozesse, wie beispielsweise die Bildung der Umkehrung zu einem mathematischen Satz (6), verstärkt im E-Niveau Anwendung. Besonders gängig in der Unterrichtspraxis ist die in der prozessbezogenen Kompetenz beinhalteten Begründung und Beschreibung von Lösungswegen (vgl. ebd. S. 12).

Im Mathematikunterricht werden Schüler*innen durch die Lehrkraft oder durch Aufgabenstellungen mit Problemen konfrontiert. Die Lösung dieser Probleme ist eine weitere elementare prozessbezogene Kompetenz der Mathematik. Bestandteil des Problemlösungsprozesses ist es, gegebene Probleme zu analysieren, Strategien zum Problemlösen auszuwählen, anzuwenden und daraus einen Plan zur Lösung zu entwickeln und abschließend die Lösung zu überprüfen und den durchlaufenen Lösungsprozess zu reflektieren. Während dieses Prozesses gehen die Schüler*innen planvoll und systematisch an die Aufgabenstellung heran (vgl. ebd., S. 13).

Der Mathematikunterricht hat auch die Aufgabe, realitätsbezogene Fragestellungen zu thematisieren, weswegen das Modellieren als prozessbezogene Kompetenz eine zentrale Rolle spielt. In Anlehnung an den Modellierungskreislauf nach Maaß wird im Bildungsplan die prozessbezogene Kompetenz „Modellieren“ in 4 Unterkompetenzen aufgegliedert. Die 4 Unterkompetenzen „Realsituation analysieren und aufbereiten“, „mathematisieren“, „im mathematischen Modell arbeiten“ und „interpretieren und validieren“ im Bildungsplan basieren auf dem Modellierungskreislauf (vgl. ebd., S. 14). Im Rahmen des Modellierens stellt das Mathematisieren und Interpretieren die damit verbundene Interdependenz von der Realität und der Mathematik dar. Beim Modellieren ist die Realität der Ausgangspunkt. Im Sinne der didaktischen Reduktion, wird die Situation vereinfacht dargestellt und somit in ein Realmodell überführt. Dieses Realmodell wird mathematisiert, sodass die Problematik im mathematischen Modell bearbeitet werden kann mit dem Ziel, zu einer mathematischen Lösung zu kommen. Die mathematische Lösung wird entsprechend interpretiert und die interpretierte Lösung zuerst in das vorangegangene Realmodell übertragen und im Anschluss validiert (vgl. Beckschulte 2019, S. 10ff.).

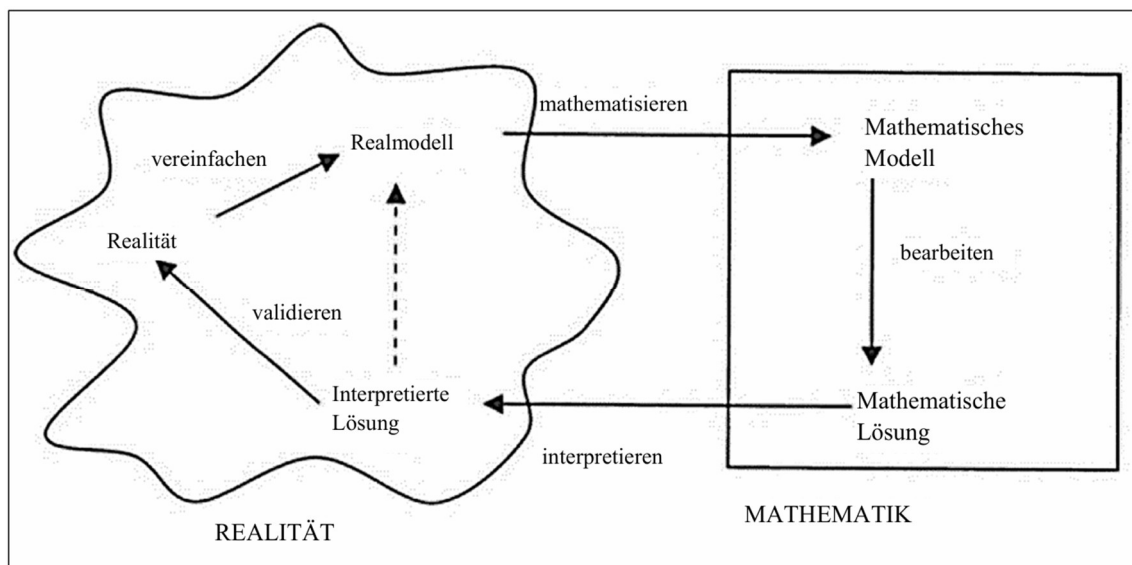


Abbildung 2: Modellierungskreislauf nach Maaß (2005a) (Beckschulte 2019, S. 13)

Durch die symbolische Darstellung im Rahmen der Mathematik gelingt es über Sprachbarrieren hinweg internationale Verständigung zu erzeugen. Genau dieser symbolische, formale und technischer Umgang mit Variablen, Gleichungen und Diagrammen ist eine weitere prozessbezogene Kompetenz im Bildungsplan. Neben dem Verständnis über symbolische und formale Darstellungen in der

Mathematik, sollen Schüler*innen mathematische Verfahren einsetzen und Hilfsmittel, wie beispielweise Software zur Visualisierung und Darstellung von Daten, sinnvoll und verständig einsetzen können (vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2016, S. 15).

Die letzte prozessbezogene Kompetenz ist das „Kommunizieren“. Obwohl die Mathematik, wie im Rahmen der prozessbezogenen Kompetenz „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ erläutert, über Sprachbarrieren hinweg auf einer symbolischen Ebene kommunizieren kann, sollen Schüler*innen im Mathematikunterricht Diskussionen und Dialoge über mathematische Themen führen. Die Schüler*innen sollen in der Lage sein, Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse darstellen zu können. Während dieser Darstellung ist die korrekte und angemessene Anwendung von Fachsprache entscheidend. Die korrekte und angemessene Verwendung von Fachsprache dient besonders zur Festigung eines hochvernetzten Begriffsnetzes, das sich die Schüler*innen über die Jahre im Mathematikunterricht aufbauen. Dadurch können mathematische Aussagen interpretiert und eingeordnet werden können (vgl. ebd., S. 15f.).

Sämtliche prozessbezogenen Kompetenzen kommen im Unterrichtskonzept zu tragen. Da im Rahmen einzelner Unterrichtssequenzen neue Begriffe eingeführt werden, liegt ein besonders großer Fokus auf der korrekten Verwendung von Fachsprache, welche unter anderem Bestandteil der prozessbezogenen Kompetenz „Kommunizieren“ ist. Häufig sollen unter der Verwendung korrekter Fachsprache zu Beginn von den Schüler*innen Hypothesen aufgestellt werden, welche entweder durch Modellierung oder Definitionsanwendungen überprüft und validiert werden. Die prozessbezogenen Kompetenzen lassen sich folglich in den Unterrichtseinheiten selten voneinander abgrenzen. Durch die bewusste Auswahl mehrerer unterschiedlicher prozessbezogener Kompetenzen soll ein tiefgreifender Kompetenzerwerb in den inhaltsbezogenen Kompetenzen gewährleistet werden.

2.3 Inhaltsbezogene Kompetenzen/Leitideen

Während die prozessbezogenen Kompetenzen mathematische Tätigkeiten beschreiben, befassen sich die inhaltsbezogenen Kompetenzen mit den

innermathematischen Fachkompetenzen. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen unterliegen wichtigen Leitideen der Mathematik, weswegen weniger von inhaltsbezogenen Kompetenzen, sondern mehr von „Leitideen“ gesprochen wird. Über jede der aufgeteilten Klassenstufen (5/6, 7/8/9 und 10) hinweg werden alle Leitideen im Bildungsplan aufgegriffen. Da sich die hier vorliegende Konzipierung allerdings auf den Bildungsplan der Klassenstufen 7/8/9 bezieht, werden die fünf Leitideen in Abhängigkeit der entsprechenden Klassenstufe thematisiert.

Im Rahmen der „Leitidee Zahl – Variable – Operation“ lernen Schüler*innen die Prozent- und Zinsrechnung kennen, wodurch ein Beitrag zu den Leitperspektiven „Berufliche Orientierung“ und „Verbraucherbildung“ geleistet wird. Durch den Einsatz von Tabellenkalkulationssystemen leistet die Prozent- und Zinsrechnung auch einen Beitrag zur Leitperspektive „Medienbildung“ im Bereich der informationstechnischen Grundlagen. Außerdem werden die Rechenfertigkeiten in dem bereits bekannten Zahlbereich der natürlichen Zahlen um die Zahlbereiche der ganzen und rationalen Zahlen erweitert. Besondere Beachtung wird im Rahmen der Zahlbereichserweiterung den Quadratwurzeln geschenkt. Die Schüler*innen erwerben Kompetenzen im Umgang mit komplexeren Zahltermen mit Klammern und Variablen. Darauf aufbauend verwenden die Schüler*innen Äquivalenzumformungen und lösen neben linearen und quadratischen Gleichungen auch Bruch- und Wurzelgleichungen. Sogar der Umgang mit linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen wird thematisiert (vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2016, S. 29ff.).

Die „Leitidee Messen“ befasst sich mit der Berechnung von Größen in Figuren und Körpern. „Die Schülerinnen und Schüler können Umfang und Flächeninhalt ebener Figuren sowie Oberflächen- und Rauminhalt von Körpern berechnen und von zusammengesetzten Körpern bestimmen. Dabei wenden sie auch Formeln zur Berechnung grundlegender Flächen und Rauminhalten an.“ (ebd., S. 33) Die Schüler*innen berechnen neben Dreiecken, Trapezen und Parallelogrammen auch Kreise. Um sowohl Kreise als auch Kreisausschnitte und -bögen berechnen zu können, lernen die Schüler*innen die Kreiszahl π , ihre Eigenschaften und Zusammenhänge kennen. Es werden neben den Flächen von ebenen Figuren Oberflächen und Volumina von Zylindern, Pyramiden und Prismen mit unterschiedlichen Grundflächen berechnet (vgl. ebd., S. 33f.).

Während sich die „Leitidee Messen“ lediglich mit dem Bestimmen von Größen von Figuren in der Ebene und Körpern befasst, werden im Rahmen der „Leitidee Raum und Form“ geometrische Zusammenhänge von Winkelweiten und Streckenlängen erschlossen. Dazu wird die Konstruierbarkeit von Dreiecken nicht nur mit den klassischen Konstruktionswerkzeugen des Lineals und des Zirkels, sondern auch mittels geeigneter dynamischer Geometriesoftware erarbeitet. Je nach technologischer Ausstattung ist die Lehrkraft in diesem Bereich jedoch gegebenenfalls beschränkt. Im Bereich der Dreiecksgeometrie werden außerdem Kompetenzen über Strahlensätze, Ähnlichkeit und Kongruenz erworben. Aufbauend auf den erworbenen Kompetenzen im Bereich der Dreiecksgeometrie lernen die Schüler*innen Streckenlängen mithilfe des Satz des Pythagoras zu bestimmen und Orthogonalität von Dreiecken zu untersuchen (vgl. ebd., S. 36ff.).

Fernab der Untersuchung von geometrischer und stereometrischer Strukturen lernen die Schüler*innen im Rahmen der „Leitidee Funktionaler Zusammenhang“ nicht nur lineare, sondern auch quadratische Funktionen kennen. Funktionale Zusammenhänge werden auf der Basis vorgegebener Funktionsterme oder anhand von Tabellen untersucht und dargestellt. Aufgrund des Hohen Maßes an übertragbaren Fragestellungen außermathematischer Themengebiete, spielt die prozessbezogene Kompetenz „Modellieren“ eine entscheidende Rolle im inhaltsbezogenen Kompetenzerwerb. Durch die stattfindenden Exkurse in außermathematische Gebiete und die Verknüpfung dieser mit innermathematischen Kompetenzen gelingt es, je nach Aufgabenstellung, einen Beitrag zu unterschiedlichen Leitperspektiven zu erbringen (vgl. ebd., S. 39ff.).

Das für die Konzipierung der vorliegenden Einheit entscheidende inhaltsbezogene Kompetenzfeld ist die „Leitidee Daten und Zufall“. Schüler*innen befassen sich nicht nur mit Daten, sondern haben auch die Aufgabe, Datenerhebungen selbst durchzuführen. Dabei lernen sie den systematischen Umgang mit Daten und können diese zielgerichtet in unterschiedlichen Darstellungen visualisieren. Auf der Basis der Kenntnisse über Daten, erarbeiten die Schüler*innen Kompetenzen im Umgang mit Wahrscheinlichkeiten und Zufällen. Die Interpretation von Wahrscheinlichkeiten, Zufällen und Zusammenhängen von Daten bietet großes Diskussionspotential für die Unterrichtspraxis. Die kritische Auseinandersetzung mit grafischen Darstellungen führt zu einer ausgeprägten Kompetenzerweiterung

im Umgang mit Medien und wie diese im Bereich der Leitperspektiven „Verbraucherbildung“ und „Medienbildung“ als Einflussfaktoren zur Irreführung genutzt werden können (vgl. ebd., S. 41ff.).

Die Konzipierung bewegt sich in der Leitidee „Daten und Zufall“ im Bereich „Wahrscheinlichkeiten verstehen und berechnen“. Zentraler Bestandteil im Umgang mit Wahrscheinlichkeiten ist es, Wahrscheinlichkeitsaussagen zu verstehen und diese beschreiben zu können. Dabei spielt die differenzierte Auseinandersetzung mit subjektivistischer Wahrscheinlichkeit eine tragende Rolle, da diese ein Grundverständnis für Wahrscheinlichkeiten in alltäglichen Situationen schafft. Auf dieser Basis können Zufallsexperimente analysiert werden und dabei die Begriffe „Ergebnis“ und „Ereignis“ erläutert werden. Die erlernten Begriffe werden in geeigneten Formen dargestellt, sodass mit ihnen eine kritische Auseinandersetzung stattfinden kann. Die Modellierung als prozessbezogene Kompetenz stellt hierfür das notwendige Werkzeug zur Verfügung. So können die Schüler*innen zwischen günstigen und möglichen Ergebnissen unterscheiden und einfache kombinatorische Überlegungen anstellen. Erweiternd stellen Schüler*innen Vergleiche über Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen an, wobei die Betrachtung von Laplace-Experimenten ein elementarer Bestandteil ist. Schüler*innen des M- und E-Niveaus lernen in diesem Zusammenhang auch die Verwendung des Gegenereignisses und dessen Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeiten kennen. Schüler*innen jeden Niveaus befassen sich abschließend mit dem sogenannten „Gesetz der großen Zahl“, wodurch Kompetenzen über Wahrscheinlichkeiten mit relativer Häufigkeit erworben werden (vgl. ebd., S. 43).

3 Fachwissenschaftliche Betrachtung der mathematischen Unterrichtseinheit

3.1 Wahrscheinlichkeitsaussagen in alltäglichen Situationen

Der Bereich „Wahrscheinlichkeiten verstehen und berechnen“ der inhaltsbezogenen Kompetenz „Leitidee Daten und Zufall“ in den Klassenstufen 7/8/9 handelt in der zehnten Unterkompetenz von Wahrscheinlichkeitsaussagen und wie diese in alltäglichen Situationen verstanden, beschrieben und erklärt werden können (vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2016, S. 43). Der Begriff der Wahrscheinlichkeit wandelte sich im Laufe der Historie. Von der Glücksspielanalyse im Frankreich des 18. Jahrhundert, über die geometrische Wahrscheinlichkeit, bis hin zur Gaußschen Glockenkurve wurde es laufend versucht, den Wahrscheinlichkeitsbegriff zu erweitern und zu definieren (vgl. Bosch 2007, S. 56). Der Begriff „Wahrscheinlichkeit“ findet im alltäglichen Sprachgebrauch häufig Anwendung. Dabei wird der Begriff „Wahrscheinlichkeit“ oder auch die Verwendung des Worts „wahrscheinlich“ mit der Überzeugungsstärke bezüglich der Richtigkeit einer Hypothese verwendet. So empfinden Kinder beispielsweise beim Würfeln eines gewöhnlichen Spielwürfels, dass die, beim „Mensch ärgere dich nicht“ benötigte 6 seltener vorkommt als andere Zahlen. Folglich wird das Eintreten des Ereignisses „6“ als unwahrscheinlicher eingeordnet als das Eintreten des Ereignisses „3“. Doch nicht nur spielende Kinder, sondern auch Fußballbegeisterte jeden Alters, die den nächsten deutschen Fußballmeister vermuten, ordnen manche Ereignisse als wahrscheinlicher als andere ein. Die getätigten Aussagen stützen sich allerdings meist nicht auf objektiven Daten oder Ranglisten, sondern haben ihren Ursprung in persönlichen Erfahrungen aus der Vergangenheit (vgl. Henze 2021, S. 42f.). Da der FC Bayern München in den letzten 12 Jahren 11 Mal die deutsche Meisterschaft gewonnen hat, wird es auf einer subjektivistischen Ebene als wahrscheinlich empfunden, dass in der kommenden Spielzeit die Meisterschale erneut nach München geht (vgl. Deutsche Fußball-Bund e.V. (DFB) 2024). Unter optimistischen Sympathisanten des FC Bayern München wird diese Auffassung stärker vertreten als beispielsweise bei Fans von Bayer Leverkusen. Da sich diese Hypothesen aber weit weg von Daten oder Ranglisten bilden und lediglich durch subjektive Eindrücke, Erfahrungen und Sympathien entstehen, sind

die aufgestellten Hypothesen eher von Ungenauigkeiten als von mathematischer Präzision geprägt (vgl. Henze 2021, S. 38).

Im Gegensatz zu dem von Ungenauigkeiten geprägten subjektivistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff hat der russische Mathematiker Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow 1933 den Wahrscheinlichkeitsbegriff widerspruchsfrei durch eine axiomatische Einführung definiert (vgl. Bosch 2007, S. 56f.). Ein Axiom ist eine unumstößliche mathematische Grundannahme auf deren Basis Theoreme, also weiterführende mathematische Hauptsätze aufgestellt werden (vgl. Loos et al. 2022, S. 7). Die drei Axiome einer Wahrscheinlichkeit sind die der Nichtnegativität, der Normiertheit und der Additivität. „Eine auf einem System von Ereignissen aus Ω definierte reelle Funktion P (P = Probabilité) heißt eine Wahrscheinlichkeit, wenn sie folgende Axiome erfüllt:

$$(K1) \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{Nichtnegativität;}$$

$$(K2) \quad P(\Omega) = 1 \quad \text{Normiertheit;}$$

$$(K3) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{Additivität}$$

für paarweise unvereinbare Ereignisse mit: $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$.“

(Bosch 2007, S. 57)

Das Axiom (K1) sagt aus, dass die Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses A stets zwischen 0 und 1 liegt. Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit 1 ist nennt man „sicheres Ereignis“; liegt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A bei 0, beziehungsweise ist A eine leere Menge, so bezeichnet man das Ereignis als „unmögliches Ereignis“. Ein unmögliches Ereignis wäre es beispielsweise, dass ein Fußballverein der 2. Fußballbundesliga die Meisterschaft der 1. Fußballbundesliga gewinnt. Da jedes Ereignis entweder höchstens ein Sicheres oder wenigstens ein Unmögliches ist, kann die Wahrscheinlichkeit nicht negativ werden, da sie im geringsten Fall 0 annimmt. Daraus folgt gemäß dem Axiom (K2), dass wenn Ω die Menge aller möglichen Ereignisse ist, diese ein sicheres Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit von 1 darstellt. Es sind zwei Ereignisse A_j und A_k nicht miteinander vereinbare Ereignisse, wie beispielsweise, dass der FC Bayern München und der VfB Stuttgart beide in der gleichen Spielzeit deutscher Fußballmeister

werden. Es soll aber durch das Ereignis A_i dargestellt werden, dass einer der beiden Vereine deutscher Fußballmeister wird, so dürfen die Wahrscheinlichkeiten von A_j und A_k gemäß dem Axiom (K3), im Rahmen des Ereignisses A_i , addiert werden. Sicher ist allerdings, gemäß dem Axiom (K2) dass eine der 18 Mannschaften der 1. Fußballbundesliga deutscher Fußballmeister wird (vgl. Bosch 2007, S. 57).

Neben den axiomatischen und subjektivistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffen gibt es den, in Kapitel 4.5 beschriebenen Laplace-Wahrscheinlichkeitsbegriff und den, in Kapitel 4.7 thematisierten frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff im Rahmen des Gesetzes der großen Zahl (vgl. Henze 2021, S. 37ff.).

3.2 Zufallsexperiment

In Anlehnung an den subjektivistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff, wird im Alltag häufig von einem Zufall gesprochen, wenn ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit im Vorfeld als niedrig prognostiziert wurde, trotzdem eintritt. Sollte ein/eine Stürmer*in der untersten Spielklasse einen Bundesligatorhüter mit einem Distanzschuss überwinden, so wird das Ereignis häufig in der Kategorie „Zufallstreffer“ eingeordnet. Zu der Fragestellung, was der Zufall überhaupt ist, haben sich die größten Wissenschaftler*innen aller Zeiten, wie beispielsweise Albert Einstein und gegenteilig Niels Bohr, abweichend geäußert. Albert Einstein prägte mit seiner berühmten Aussage, dass Gott nicht würfle die Sichtweise, dass alles, was im Universum passiere durch entsprechende Datenlage deterministisch und somit berechenbar wird (vgl. Einstein 1995], c1982, S. 323). Niels Bohr hingegen nimmt bei der Betrachtung der Quantenmechanik in Abhängigkeit zur Kopenhagener Deutung die Position ein, dass Realitäten erst durch Messung Wahrscheinlichkeiten annehmen und diese im Vorfeld nicht bestimmt werden können (vgl. Bohr 1928, S. 580 ff.). Werden diese hochkomplexen physikalischen Annahmen auf die Mathematik in Verbindung mit Fußball übertragen, lässt sich Zufall nicht final definieren. Während die eine extreme Ausrichtung ist, dass alles, was auf dem Spielfeld passiert, unorganisiertes und zufälliges Chaos ist, nehmen andere an, dass durch eine entsprechend große Datenlage alles, was geschieht berechenbar und somit vorhersagbar ist. Fernab der Betrachtung davon, was Zufall überhaupt ist, ist man sich in der Mathematik einig, was ein Zufallsexperiment ist. Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment, das die folgenden Eigenschaften erfüllt:

kontrollierter Verlauf, Wiederholbarkeit unter gleichen Bedingungen und ein nicht vorhersagbares Ergebnis (vgl. Bosch 2007, S. 53). Die Rahmenbedingungen des Fußballs gewährleisten einen kontrollierten Verlauf von Zufallsexperimenten, jedoch ist bei genauer Betrachtung die Wiederholbarkeit unter gleichen Bedingungen nicht gegeben. Auch wenn beispielsweise die Untersuchung des Elfmeterschießens, welches nach 120 Minuten Spielzeit stattfindet, sind die Bedingungen nie die gleichen, da die Spieler*innen in aus den 120 Spielminuten ein unterschiedliches Maß an Erschöpfung erfahren haben und somit mit unterschiedlichen Voraussetzungen die Elfmeter schießen. Neben körperlichen Faktoren spielen auch sportpsychologische Faktoren eine Rolle, die dazu führen, dass Zufallsexperimente als solches nicht die Definition erfüllen (vgl. ebd., S. 53). Im Sinne der didaktischen Reduktion, werden diese Faktoren jedoch nicht beachtet.

3.3 Geeignete Darstellungsformen von Daten

Elementarer Bestandteil bei der Durchführung von Zufallsexperimenten ist die Dokumentation der erfassten Ergebnisse. Diese Dokumentation findet in unterschiedlichen Darstellungsformen und Aufbereitungen statt. Die beschriebenen Darstellungsformen sind die, welche auch im Rahmen des Unterrichtskonzepts relevant sind. In der direktesten Form können die Ergebnisse von Zufallsexperimenten in einer Tabelle dargestellt werden. Die tabellarische Darstellung von Daten enthalten sämtliche Daten und bieten folglich eine sehr präzise Analyse, besonders dann, wenn die einzelnen Ergebnisse in den Fokus genommen werden (vgl. Kuckartz 2010, S.13f.). Die bekannteste Form, einen Datensatz in fußballerischem Kontext tabellarisch darzustellen, ist jede Platzierungstabelle, welche selbst in den untersten Spielklassen üblicherweise angefertigt wird. In ihr werden in Form einer Rangliste die Vereinsnamen, die erzielten Punkte, sowie das Verhältnis von erzielten Toren zu kassierten Toren festgehalten.

Wenn allerdings anstatt einer Rangliste eine relative Häufigkeit in Form von Verhältnissen dargestellt werden soll, muss auf Basis des tabellarischen Datensatzes eine geeignetere Darstellungsform zur Visualisierung gewählt werden. Werden Daten in Form von Diagrammen visualisiert, können einzelne Ereignisse nicht mehr identifiziert werden, sondern sie nur in Verhältnis zu anderen Ereignissen der gleichen Art identifiziert werden. Das ist beispielsweise bei Kreisdiagrammen der Fall. Bei der Darstellung eines Datensatzes im Kreisdiagramm wird

ein Kreis in Kreissegmente, entsprechend der relativen Häufigkeit der Ereignisse eingeteilt (vgl. ebd., S. 44f.). Ein möglicher Anwendungsbereich der Kreisdiagramme ergibt sich, wenn man die Arten des Torerfolgs eines einzelnen Torschützen betrachtet. Es wird beispielsweise nach der Distanz der Schüsse zum Tor in 5 Meter Schritten beim Torerfolg differenziert. Eine weitere mögliche Differenzierung wäre die Betrachtung der Körperteile (rechter Fuß, linker Fuß, Kopf und andere), mit welchen das Tor erzielt wurde.

Werden einzelne Spieler*innen oder Teams miteinander verglichen, so eignet sich besonders die Darstellungsform der Säulen und Balkendiagramme, welche auch als gespaltete Varianten visualisiert werden können. Ein Säulendiagramm ist ein vertikales Rechteck, während ein Balkendiagramm ein Rechteck in der Horizontalen ist. Durch sie können einfach Häufigkeitsverteilungen einfach und übersichtlich dargestellt werden (vgl. ebd., S. 38ff.). Vergleicht man die Anzahl der erzielten Tore von Spieler*innen über den Saisonverlauf hinweg, eignen sich entweder Säulen-/ oder Balkendiagramme, welche nicht gespalten, also in Verhältnissen dargestellt werden. Wird die Anzahl der Torschüsse zweier Teams im Vergleich dargestellt, so bietet sich die Nutzung eines gespaltenen Balkendiagramms an. Durch ein gespaltenes Balkendiagramm können weitere Daten wie der Ballbesitz, die Anzahl der Fouls oder die Quote der gewonnenen Zweikämpfe dargestellt werden können, sodass schnell erkenntlich wird, welches Team in der gegebenen Kategorie einen Vorteil hat.

3.4 Mögliche und günstige Ergebnisse

Gegenstand einer statistischen Erhebung, auch im Zuge von Zufallsexperimenten die n-Mal durchgeführt werden, ist es, Merkmale von einzelnen Merkmalsträgern zu untersuchen. Während die Merkmale an sich den Untersuchungsgegenstand widerspiegeln, sind die Ausprägungen der Merkmale das, was man in der Analyse von eindimensionalen Stichproben untersucht (vgl. Bosch 2007, S. 3f.). Werden beispielsweise die Trefferquoten von einzelnen Elfmeterschützen verglichen, so sind die Elfmeter das zu untersuchende Merkmal, die Schützen die Merkmalsträger und die Merkmalsausprägungen der Ausgang der geschossenen Elfmeter – Treffer oder kein Treffer.

Diese Ausprägungen des untersuchten Merkmals werden bezeichnet mit $a_1, a_2, \dots, a_j$. Soll angegeben werden, wie häufig eine Merkmalsausprägung in a_j vorkommt, so wird diese absolute Häufigkeit definiert durch h_j . Die Anzahl aller Ausgänge, also die absolute Häufigkeit werden als mögliche Ergebnisse bezeichnet. Die Anzahl des Auftretens einer bestimmten Merkmalsausprägung wird als günstiges Ergebnis bezeichnet und es wird in ein Verhältnis zu den zu möglichen Ergebnissen gesetzt. Dieses Verhältnis wird in Prozent (%) angegeben und beschreibt die relative Häufigkeit durch: $r_n(A) = \frac{h_n(A)}{n}$. Gemäß der in Kapitel 3.1 definieren Axiome können relative Häufigkeiten von disjunkten, also unvereinbaren Ereignissen addiert werden (vgl. ebd., S. 55). Werden beispielsweise die Anzahl der Tore nach Standardsituationen (Eckbälle, Freistöße und Einwürfe) in ein Verhältnis gesetzt zu den Toren, welche insgesamt erzielt wurden, so dürfen die relativen Häufigkeiten der einzelnen günstigen Ereignisse addiert werden.

$$\text{rel. Häufigkeit Tore Standardsituationen} = \frac{\text{Tore Freistoß} + \text{Tore Eckball} + \text{Tore Einwurf}}{\text{Anzahl aller erzielten Tore}}$$

Mehrstufige Zufallsexperimente sind Zufallsexperimente, die nacheinander oder auch gleichzeitig m -Mal durchgeführt werden. Möchte man die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines günstigen Ereignisses in Mehrstufigkeit mit der Mächtigkeit m berechnen, so wird die Eintrittswahrscheinlichkeit des günstigen Ergebnisses, gemäß der Produktregel der Kombinatorik m -Mal mit sich selbst multipliziert, also mit dem Exponent m potenziert. Wird ein Elfmeter zu 80% verwandelt und es soll die Wahrscheinlichkeit angegeben werden, dass 5 Elfmeter in Folge verwandelt werden, so wird diese berechnet durch: $P_{5 \text{ Elfmeter in Folge}} = 0,8 * 0,8 * 0,8 * 0,8 * 0,8 = 0,8^5 = 0,32768 = 32,77\%$. Es spielt keine Rolle, ob sich die Wahrscheinlichkeit P des günstigen Ereignisses verändert. Solange die Eintrittswahrscheinlichkeiten der günstigen Ereignisse bekannt sind und ein m -Maliges Eintreten des Ereignisses berechnet werden soll, dürfen die Wahrscheinlichkeiten miteinander, gemäß der Produktregel der Kombinatorik, multipliziert werden (vgl. ebd., S. 61).

3.5 Laplace-Experimente und Gegenereignisse

Wie bereits in Kapitel 3.1 beschreiben, gibt es neben den subjektivistischen und axiomatischen Wahrscheinlichkeitsbegriffen auf die Laplace-Wahrscheinlichkeitsbegriff. Dieser wurde durch den bedeutenden französischen Mathematiker

und Physiker Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827), dessen Beitrag zur Wahrscheinlichkeitsberechnung elementar war und nach wie vor ist, geprägt (vgl. Hahn 2005, S. 1ff.). Die Berechnung im Rahmen der Laplace-Wahrscheinlichkeiten diente besonders im Frankreich des 18. Jahrhunderts zur Analyse von einfachen Glücksspielen, wie beispielsweise die Analyse des Glücksspielklassikers „Roulette“. Laplace-Experimente sind eine besondere Form von Zufallsexperimenten. Man spricht von einem Laplace-Experiment, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: „(L1) Bei dem Zufallsexperiment gibt es nur endlich viele verschiedene Versuchsergebnisse, d.h. die Ergebnismenge Ω ist endlich. (L2) Keines der Versuchsergebnisse darf bevorzugt auftreten, d.h. alle Elementarereignisse sind gleich wahrscheinlich“ (Bosch 2007, S. 59). Im Fußball finden sich Laplace-Experimente selten auf dem Spielfeld wieder. Betrachtet man jedoch beispielsweise die Auslosung von Gruppenkonstellationen im Vorfeld an jedes Turnier, lassen sich die Wahrscheinlichkeiten auf bestimmte Gegner zu treffen mit der Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnen. Diese werden in Anlehnung an die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung unter Verwendung der möglichen und günstigen Ereignisse wie folgt berechnet: $P(A) = [\dots] \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der insgesamt möglichen Fälle}}$ (vgl. ebd., S. 60) Eine besondere Form von Laplace-Experimenten sind die sogenannten Bernoulli-Versuche. Bernoulli-Versuche sind Zufallsexperimente, bei denen nur zwischen Eintreten eines Ereignisses und nicht eintreten eines Ereignisses unterschieden wird – umgangssprachlich auch Treffer oder Nieten. Der Münzwurf vor jedem Fußballspiel, welcher festlegt, welche Mannschaft Anstoß hat, stellt beispielsweise einen klassischen Bernoulli-Versuch dar. Die Spieler*innen legen sich im Vorfeld entweder auf Kopf oder Zahl fest, der/die Schiedsrichter*in wirft die Münze und das Ergebnis wird entsprechen als Treffer oder Nieten eingeordnet. Nicht jeder Bernoulli-Versuch ist allerdings ein Laplace-Experiment, im Rahmen von Laplace-Experimenten die Eintrittswahrscheinlichkeiten aller möglichen Ereignisse (L2) gleich sein müssen (vgl. Henze 2021, S. 13f.).

Bei der Betrachtung von Laplace-Experimenten wird die Eintrittswahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch Berechnung bestimmt. In Verbindung mit Bernoulli-Versuchen, bei welchen eine Differenzierung zwischen Treffer und Nieten, wird im

Zuge der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch das Eintreten des Gegenereignisses analysiert. Das Gegenereignis ist das Ereignis, dass genau dann eintritt, wenn das Hauptereignis nicht eintritt (vgl. ebd., S. 6). Was trivial klingt, stellt jedoch einen Perspektivwechsel, der näher untersucht werden muss, dar. Einerseits kann ein das Parieren eines Elfmeters als „nicht getroffener Elfmeter“, andererseits als ein „gehaltener Elfmeter“ eingeordnet werden. Die Eintrittswahrscheinlichkeit des Gegenereignisses wird berechnet durch Subtraktion der Eintrittswahrscheinlichkeit des Hauptereignisses von 100%: $P_{\text{Gegenereignis}} = 1 - P_{\text{Hauptereignis}}$ oder $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$ (vgl. ebd., S. 67).

3.6 Gesetz der großen Zahl

Analysiert man die Ausgänge eines Zufallsexperiments auf der Basis einer tabellarischen Erfassung und wertet die Ausgänge entsprechend der relativen Häufigkeiten aus, ergeben sich Häufigkeiten, die zwar der Realität entsprechen, aber nur eine Annäherung an die tatsächliche Wahrscheinlichkeit eines Zufallsexperiments darstellen. Die Durchführung von Zufallsexperimenten im Rahmen des Gesetzes der großen Zahl stellt sicher, dass bei genügend vielen Wiederholungen die relativen Häufigkeiten der Ergebnisse stabil werden und den theoretischen Wahrscheinlichkeiten entsprechen. Es ist ein zentrales Konzept zur Verbindung von theoretischer Wahrscheinlichkeit und empirischer Beobachtung und bildet die Grundlage für viele weitere statistische Methoden und Anwendungen, auch und besonders bei der statistischen Aufarbeitung von Sportarten. Bei der Betrachtung des Gesetzes der großen Zahl wird zwischen dem schwachen und dem starken Gesetz der großen Zahl differenziert. Das schwache Gesetz der großen Zahl besagt, dass die durchschnittliche Abweichung der relativen Häufigkeit eines Ereignisses vom Erwartungswert mit wachsender Anzahl der Wiederholungen eines Zufallsexperiments gegen Null konvergiert. Das starke Gesetz der großen Zahl hingegen besagt, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses fast sicher, mit der Wahrscheinlichkeit $P = 1$ gegen die theoretische Wahrscheinlichkeit konvergiert, wenn die Anzahl der Wiederholungen ins Unendliche geht (vgl. Klenke 2020, S. 121ff.). Die Unterscheidung zwischen dem schwachen und dem starken Gesetz der großen Zahl ist notwendig, um beispielsweise im Fußball zu erklären, warum die durchschnittliche Anzahl an Toren eines Spielers in einer Saison mit hoher Wahrscheinlichkeit nahe dem erwarteten Wert liegt, gemäß

dem schwaches Gesetz und warum über eine sehr große Anzahl an Spielen die tatsächliche Torquote des Spielers fast sicher der erwarteten Torquote entspricht, gemäß dem starkes Gesetz.

4 Didaktisches Vorgehen

4.1 Fußball trifft auf Mathematik – didaktische Prinzipien und Relevanz von Aufgabenstellung aus der Lebensrealität von Schüler*innen

Die Mathematik ist häufig mit dem Vorurteil konfrontiert, dass sie einem nichts für das weitere Leben nütze, weswegen es eine große Herausforderung für Lehrkräfte darstellt, Schüler*innen für den Unterrichtsinhalt zu motivieren (vgl. Reiss und Hammer 2021, S. 13ff.). Um diesem Vorurteil entgegenzuwirken ist ein didaktisches Konzept, die Lebensrealität der Schüler*innen im Unterrichtsgeschehen aufzugreifen. Aus motivationalen Aspekten sollen Verknüpfungen des Alltags mit der Mathematik geschaffen werden (vgl. Helmke 2009, S. 223f.). Das „Berliner Modell“ ist eines von vielen didaktischen Modellen, das die Lebensrealität von Schüler*innen in den Unterricht mit einfließen lässt. Das Berliner Modell beantwortet durch Interdependenzen grundlegender Fragen die Planung von Unterricht unter Berücksichtigung von anthropologisch-psychologischen und soziokulturellen Voraussetzungen von Schüler*innen. Der Unterricht als interdependentes Konstrukt wird nicht nur in Abhängigkeit von anthropologisch-psychologischen und soziokulturellen Voraussetzungen der Schüler*innen geplant, sondern es werden auch die Folgen des Kompetenzerwerbs auf die Lebensrealität der Schüler*innen berücksichtigt (vgl. Peterßen 2004, S. 54 ff.).

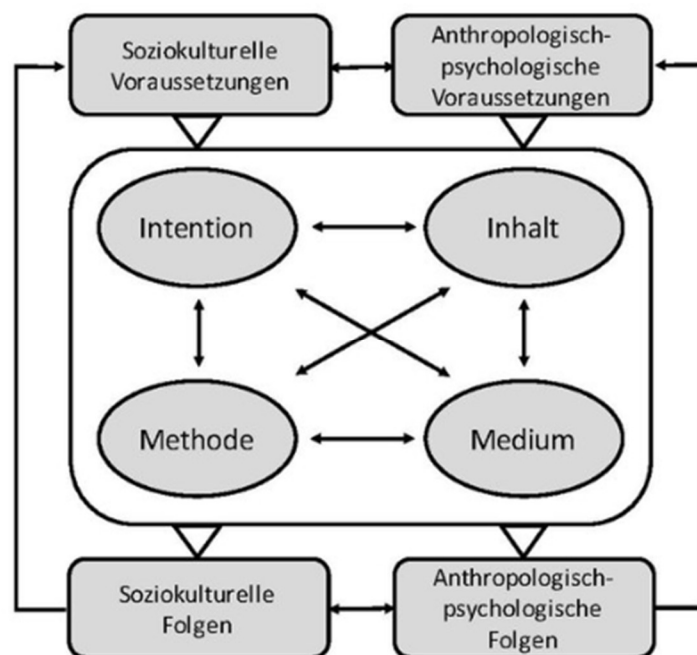


Abbildung 3: Berliner Modell nach Paul Heimann (1962) (Peterßen 2004, S. 54)

Werden die persönlichen Interessen als ein Teil der soziokulturellen Voraussetzungen verstanden, ist es Aufgabe der Unterrichtsplanung diese miteinfließen zu lassen. Sport ist eine der zentralen Interessen Jugendlicher und Kinder. Im Kindesalter bis 6 Jahre sind sowohl bei den Jungen als auch bei den Mädchen jede*r Vierte Mitglied in einem Sportverein. Im Alter von 7 bis 14 sind 76,83 % der Jungen und 57,8 % der Mädchen in einem Sportverein als Sportler*in aktiv. Mit steigendem Alter verlieren die Jugendlichen zunehmend das Interesse am Sport. Der Anteil der Jugendlichen, die in einem Sportverein aktiv sind, fällt in dem Altersspektrum von 15 bis 18 Jahren bei den Jungen auf 62,34 % und bei den Mädchen auf 43,15 %. Über Kinder und Jugendliche diversen Geschlechts macht der Deutsche Olympische Sportbund zwar Angaben über die Anzahl der Mitgliedschaften, diese werden aber nicht anteilig zur Bevölkerung betrachtet (vgl. Deutscher Olympischer Sportbund (DOSB) 2023, S. 17). Dabei ist der Fußball als Sportart die, die bei den Kindern und Jugendlichen am beliebtesten ist. Über 2.200.000 Minderjährige sind Mitglied in einem Fußballverein (vgl. ebd., S. 5) Folglich wird es unabdingbar, gemäß dem Ansatz, die Lebensrealität von Schüler*innen in den Unterricht miteinfließen zu lassen, das große Interesse der Schüler*innen am Volkssport Fußball mit der Mathematik zu verbinden.

Der im Berliner Modell als „Inhalt“ aufgeführte Aspekt befasst sich mit dem Unterrichtsgegenstand, welcher durch den Bildungsplan vorgegeben wird. Um den Erwerb der übergeordneten inhaltsbezogenen Kompetenzen sicherzustellen, ist es sinnvoll, dass Lehrkräfte für einzelne Unterrichtseinheiten Lernziele formulieren. Die Lernziele für die Unterrichtseinheit werden zusammenhängend mit den im Bildungsplan verankerten Operatoren verfasst. Für ein tiefer verankertes Wissen sollten Lernziele aller Anforderungsbereiche (1 bis 3) unabhängig der Niveaus der Schüler*innen formuliert werden. Entscheidend ist neben der Formulierung zielführender Lernziele eine Unterrichtsstruktur, die genug Zeit für die Überprüfung der Lernzielerreichung lässt (vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2016, S. 50f.).

Die Begründung der Lernziele findet sich im Berliner Modell unter dem Aspekt „Intention“ wieder. In ihm soll die Legitimierung des Inhalts begründet werden. In Anlehnung an die Lernzieltaxonomien von Benjamin S. Bloom (1956) wurde von Winter und Wittmann (2002) eine Lernzielstrukturierung für den

Mathematikunterricht vorgeschlagen, welche auf der Unterscheidung von Tätigkeiten beruht. Es werden kognitive Strategien von Grundwissen und Grundtechniken abgegrenzt. Bestandteil der kognitiven Strategien sind: „1. Der Schüler soll lernen, Situationen (mathematischer und besonders auch real umweltlicher Art) zu mathematisieren. 2. Der Schüler soll lernen, sich forschend entdeckend und konstruktiv zu betätigen. 3. Der Schüler soll lernen, zu argumentieren“ (Sill 2019, S. 41). Zusätzlich zu den kognitiven Strategien sollen Schüler*innen Grundkenntnisse und Grundtechniken zur Verarbeitung mathematischer Informationen einschließlich deren Anwendung erlernen (vgl. ebd., S. 41). Die enge Vernetzung von Inhalt unter Berücksichtigung der Intention sorgt für eine zielführende Grundstruktur für einen gelungenen Mathematikunterricht, welcher nicht nur von Unterrichtseffektivität, sondern auch von Unterrichtseffizienz gekennzeichnet ist.

Die Methode bezieht sich im Berliner Modell neben den von den prozessbezogenen Kompetenzen angeleiteten Unterrichtsabläufen auch auf die Sozialformen und deren Abhängigkeit zu den anderen Faktoren der Unterrichtsplanung. Im Rahmen des Unterrichtskonzepts finden unterschiedliche Sozialformen Anwendung. Die Schüler*innen sollen Arbeitsaufträge, welche sich rein auf die Berechnung stützen größtenteils in Einzelarbeit durchführen. Aufgaben, die ein höheres Verständnis in Abhängigkeit des Fußballs voraussetzen, werden entweder in Partnerarbeit oder im Rahmen einer Plenumsdiskussion durchgeführt. Dies soll dazu beitragen, dass wenn einzelne Schüler*innen keinen Zugang zum Fußball haben, sich diese mit fußballaffinen Schüler*innen austauschen können. Die Sicherungsphasen der Ergebnisse werden grundsätzlich in Plenumsdiskussionen durchgeführt, um eine hohe Qualität der Ergebnisse zu gewährleisten und die Festsetzung falscher Lösungen und Denkmuster präventiv zu vermeiden.

Die verwendeten Medien werden größtenteils als Arbeitsmaterialien oder zu Visualisierungszwecken genutzt. In der Konzipierung wird von einem Klassenzimmer ausgegangen, das mit einem Smart-Board mit Internetzugang ausgestattet ist. Dadurch können neben Ergebnissen, welche am Smart-Board festgehalten werden, auch Videos zur Einführung gezeigt, oder dynamische Geometrie-Software eingesetzt werden. Neben den technischen Aspekten der Unterrichtsgestaltung fällt unter den Aspekt „Medien“ im Berliner Modell auch die Bereitstellung von Arbeitsmaterialien. Die Schüler*innen erhalten im Unterrichtsverlauf vier

selbsterstellte Arbeitsblätter, welche vereinzelt durch Berechnungen im Schulheft ergänzt werden. Zu den einzelnen Arbeitsblättern stehen auch Lösungsblätter bereit, sodass Schüler*innen, die nicht anwesend waren und den behandelten Stoff noch nicht nacharbeiten konnten dadurch nicht in einen Nachteil geraten, da die Unterrichtseinheiten alle aufeinander aufbauen.

4.2 Methodisches Vorgehen

Für die Unterrichtseinheit diene eine fiktive 7. Klasse einer gewöhnlichen Realschule. Die Schüler*innen sind folglich größtenteils dem M-Niveau, vereinzelt dem G-Niveau zuzuordnen. Es findet keine direkte Differenzierung in den Arbeitsaufträgen oder in den Lernzielen statt, es wird jedoch stets den schwächeren Schüler*innen genug Zeit gelassen, die Arbeitsaufträge entsprechend zu bearbeiten und die Qualität durch ausgeprägte Ergebnissicherungsphasen zu gewährleisten. Die stärkeren und schnelleren Schüler*innen haben stets die Möglichkeit, die nächsten Arbeitsaufträge zu bearbeiten oder sich gegebenenfalls weiter im Kontext der Inhalte zu beschäftigen, wie beispielsweise durch das erneute Spielen des Elfmeterspiels. Durch das Aufkommen von Operatoren aller Anforderungsbereiche in den Lernzielen wird ein tiefgreifender Kompetenzerwerb unabhängig des individuellen Niveaus angestrebt. Das Konzept wird im Rahmen dieser wissenschaftlichen Arbeit nicht erprobt und dient der Inspiration über die Möglichkeiten, wie sich Sportarten generell und besonders der Fußball als die beliebteste Sportart Deutschlands in das Unterrichtsgeschehen in Mathematik miteinbinden lässt. Sowohl die didaktischen Grundprinzipien im Rahmen des Berliner Modells als auch die fachwissenschaftliche Betrachtung der Unterrichtsgegenstände wurde literaturgestützt verfasst und die Quellen entsprechend im Literatur- und Abbildungsverzeichnis aufgeführt. Das vorliegende Konzept und mit ihm die Unterrichtsgegenstände soll nicht eine korrekte tiefgreifende statistische Aufarbeitung des Fußballs thematisieren. Die Inhalte wurden im Zuge der didaktischen Reduktion auf die Erreichung der Lernziele angepasst.

4.3 Unterrichtsskizze 1: inhaltsbezogene Unterkompetenzen 10 bis 13

4.3.1 Allgemeines und Lernziele

In einer 90-minütigen Unterrichtseinheit sollen die inhaltsbezogenen Unterkompetenzen 10 bis 13 erworben werden. Diese umfassen grundlegende Inhalte im Bereich von Wahrscheinlichkeitsaussagen (10) und Zufallsexperimenten (11).

Auch die Darstellung (12) und Differenzierung zwischen möglichen und günstigen Ergebnissen (13) wird thematisiert. Gemäß dem didaktischen Ansatz die Lebenswelt der Schüler*innen miteinfließen zu lassen, findet die gesamte Unterrichtseinheit in Abhängigkeit zum Fußball statt. Dafür werden unterschiedliche fußballtypische Situationen aus einer mathematischen Perspektive betrachtet, analysiert und evaluiert. Für die Unterrichtseinheit sind die folgenden Lernziele definiert:

1. Die Schüler*innen identifizieren und beschreiben Wahrscheinlichkeitsaussagen. (10)
2. Die Schüler*innen erkennen Zufallsexperimente in Abgrenzung zu sicheren und unmöglichen Ereignissen. Diese Zufallsexperimente werden untersucht und dessen Ergebnis interpretiert. (11)
3. Die Schüler*innen stellen Ereignisse in geeigneter Form, in Kreis- und gespaltenen Säulendiagrammen dar. (12)
4. Die Schüler*innen geben durch einfache kombinatorische Überlegungen die Anzahl möglicher und günstiger Ergebnisse an und erklären diese. (13)

4.3.2 Einstieg

Zu Beginn der Unterrichtseinheit stellt die Lehrkraft die Frage an die Klasse, wer Europameister wird. Die Aussagen der Schüler*innen werden an dem Smart-Board festgehalten und die Gründe für die Prognose durch die Lehrkraft erfragt. Bei den Schüler*innen soll die Neugier geweckt werden, wie sich das Hobby mit der Mathematik verbinden lässt. Im Anschluss an den fünfminütigen Einstieg verdeutlicht die Lehrkraft, dass die Einstiegsfrage nicht grundlos gestellt wurde, sondern dass es in der heutigen Unterrichtseinheit um die Verbindung der Mathematik mit Fußball geht. Da Sportgroßereignisse, wie die Fußball-Europameisterschaft ein emotional aufgeladenes Themengebiet ist, stellt es eine Herausforderung für die Lehrkraft dar, eventuell aufkommende Unruhen in der Klasse zu kontrollieren.

Als Gelenkstelle zwischen dem Einstieg und der ersten Erarbeitungsphase wird das Arbeitsblatt 1 „Wahrscheinlichkeiten und Zufall im Fußball“ an das Smart-Board projiziert und dessen Bearbeitung und die Sozialform der Bearbeitungsphase, die Partnerarbeit durchgesprochen. Die Lehrkraft hält die Überschrift



Datum: _____

Merksätze/Erkenntnisse der Vorderseite

4.3.3 Erarbeitung 1

25

sollen. Gegenstand von Aufgabe 1 ist es, dass die Schüler*innen eine Prognose aus subjektiver Perspektive anstellen, welche Nation Fußball-Europameister wird. Sie identifizieren dadurch ein Ereignis einer Wahrscheinlichkeitsaussage und beschreiben es durch die Begründung ihrer Prognose. Dadurch wird die Basis zur Zielerreichung des ersten Lernziels gelegt. Bei Aufgabe 2 erwerben die Schüler*innen Kompetenzen über den Wahrscheinlichkeitsraum durch die Erkenntnis, dass jede der teilnehmenden Nationen unter den passenden Umständen Fußball-Europameister werden kann. Über unmögliche und sichere Ereignisse erwerben die Schüler*innen Kompetenzen in Zusammenhang zur Additivität von Wahrscheinlichkeiten bei den Aufgaben 3 bis 5. Auch die Sozialform der Partnerarbeit wurde bewusst gewählt. Sollte ein*e Schüler*in keinen Zugang zum Fußball haben, stellt der gemeinsame Austausch in der Partnerarbeit eine Hilfestellung dar. Sollten die Schüler*innen massive Probleme mit der sportartspezifischen Komponente des Arbeitsblatts haben, ist es die Aufgabe der Lehrkraft, verbale Hilfestellung anzubieten. Ist die Kapazitätsgrenze der Lehrkraft erreicht, so dass die Lehrkraft das Menge der aufkommenden Fragen nicht bewältigen kann, dürfen die Schüler*innen andere Zweiergruppen befragen. Für die Bearbeitung der Arbeitsaufträge haben die Schüler*innen 15 Minuten Zeit.

4.3.4 Ergebnissicherung

In der Ergebnissicherung werden im Plenum die Arbeitsaufträge 1 bis 5 vom Arbeitsblatt 1 besprochen. Die Schüler*innen begründen ihre Antworten und beteiligen sich aktiv an der Plenumsdiskussion durch das Stellen von Fragen bei Unklarheiten. Die Lehrkraft hält die korrekten Antworten der Schüler*innen fest, während die Schüler*innen eventuelle Korrekturen auf ihrem Arbeitsblatt vornehmen. Durch die Visualisierung der Ergebnisse der Schüler*innen sollen sich diese in ihren Leistungen bestätigt fühlen mit dem Ziel, die Motivation für den weiteren Unterrichtsverlauf zu stärken. Da die Antworten der ersten Aufgabe reine Hypothesen darstellen, brauchen diese nicht auf dem Lösungsblatt vermerkt werden. Die Lösungen für die Aufgaben 2 bis 5 sind die Folgenden:

Aufgabe 2: Auch wenn die Mannschaften unterschiedlich gut sind, kann jede der teilnehmenden Mannschaften unter den passenden Umständen Europameister werden.

Aufgabe 3: Brasilien kann bei der Europameisterschaft keinen Titel gewinnen, da Brasilien kein Teilnehmer der Europameisterschaft ist.

Aufgabe 4: Die Aussage ist korrekt. Eine der teilnehmenden Mannschaften wird sich im Finale durchsetzen und Europameister werden.

Aufgabe 5:

$$P = 0,2 + 0,15 + 0,08 + 0,04 + 0,03 = 0,5 = 50 \%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine der 5 genannten Mannschaften Europameister wird, liegt bei 50 %.

Auf der Basis der festgehaltenen Ergebnisse formuliert die Lehrkraft am Smart-Board die folgenden 5 Merksätze, welche von den Schüler*innen auf der Rückseite des Arbeitsblatts 1 festgehalten werden sollen. Schlüsselbegriffe werden dabei unterstrichen.

1. Einen möglichen Ausgang eines Zufallsexperiments nennt man Ereignis.
2. Die Eintrittswahrscheinlichkeit (P) eines Ereignisses wird in Prozent (%) angegeben und liegt immer zwischen 0 und 1.
3. Die Eintrittswahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist nie negativ, sondern mindestens 0. Solch ein Ereignis mit $P = 0$ nennt man unmögliches Ereignis.
4. Die Eintrittswahrscheinlichkeiten P einzelner Ereignisse dürfen addiert werden. Addiert man alle Eintrittswahrscheinlichkeiten, so ergeben diese immer 1.
5. Ein Ereignis, dessen Eintrittswahrscheinlichkeit $P = 1$ ist, nennt man sicheres Ereignis.

Durch das Festhalten der Merksätze auf der Basis der Erkenntnisse entkoppelt man die Kompetenzen vom Fußball und sie können auf andere Thematiken übertragen werden. Durch eine gezielt anmoderierte Plenumsdiskussion durch die Lehrkraft kann sichergestellt werden, dass die Lernziele 1 und 2 erreicht werden. Für die Ergebnissicherung sind 20 Minuten vorgesehen.

Als Gelenkstelle zur nächsten Erarbeitungsphase zeigt die Lehrkraft ein Video am Smart-Board mit Internetzugang vom Elfmeterschießen des Fußball Weltmeisterschafts-Finale 2022 zwischen Argentinien und Frankreich. Während des

Anlaufs zum Elfmeter wird das Video angehalten und die Lehrkraft fordert zur Hypothesenaufstellung über den Ausgang (Treffer oder kein Treffer) und die Platzierung des Schusses auf. Die aufgestellten Hypothesen werden separat am Smart-Board festgehalten – Treffer oder kein Treffer werden in einer Strichliste notiert, die Platzierung des Schusses mit einem Kreuz in einem skizzierten Fußballtor. Das Video wird weiter abgespielt und die aufgestellten Hypothesen überprüft. Die Schüler*innen sollen durch das Video und die Hypothesenüberprüfung erste Berührungspunkte mit Zufallsexperimenten und möglichen und günstigen Ergebnissen erfahren und ein Gespür für die Charakteristika entwickeln. Im weiteren Verlauf der 10-minütigen Gelenkstelle wird das Arbeitsblatt 2 „Elfmeterschießen – Alles nur Zufall?“ an das Smart-Board projiziert und dessen Bearbeitung besprochen inklusive Mitteilung der Spielregeln des Elfmeter-Spiels. Bevor die Lehrkraft das Arbeitsblatt und die benötigten Spielmaterialien austellt, schreibt sie die Uhrzeit an das Smart-Board, zu der die Bearbeitungsphase des Arbeitsblatts endet. Die Schüler*innen haben während der Gelenkstelle aktiv zuzuhören und gegebenenfalls entstandene Fragen zu stellen. Das Arbeitsblatt und die Briefumschläge mit den benötigten Spielmaterialien werden erst dann durch die Lehrkraft ausgeteilt. Das Arbeitsblatt soll bewusst erst ausgeteilt werden, nachdem der weitere Ablauf sowie die Sozialform der Partnerarbeit besprochen wurden, dass einzelne Schüler*innen nicht bereits mit der Bearbeitung starten, bevor das Thema oder einzelne Arbeitsaufträge klar sind. Durch den spielerischen Zugang zur Thematik in Verbindung mit der Thematik Fußball sollen die Schüler*innen motiviert werden (vgl. Reiss und Hammer 2021, S. 13ff.).



Datum: _____



Datum: _____

Elfmeterschießen - Alles nur Zufall?

Elfmeter-Spiel

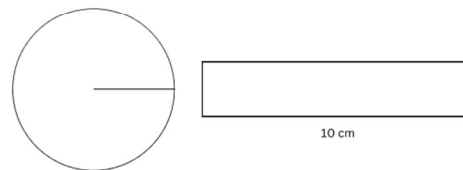
Durchführung/Regeln:

1. Jede*r Spieler*in nimmt sich einen Umschlag und wird Spieler*in oder Torhüter*in.
2. Mische die Spielkarten und breite sie verdeckt vor die aus.
3. Beide ziehen gleichzeitig eine Karte und vergleichen sie. Stimmen X und O überein, wurde kein Tor erzielt. Sind X und O an abweichenden Positionen, wurde ein Tor erzielt.
4. Dokumentiere den Spielfortschritt in der zugehörigen Tabelle auf der Rückseite.
5. Solltet Ihr vor Ablauf der Bearbeitungszeit fertig werden, könnt Ihr mit der Hausaufgabe beginnen.

Tabelle Elfmeter-Spiel	
Schuss	✓Treffer oder kein Treffer ✕
Schuss 1	
Schuss 2	
Schuss 3	
Schuss 4	
Schuss 5	

Hausaufgabe

Aufgabe 1: Fertige auf der Basis der Tabelle Deines Elfmeter-Spiels ein Kreisdiagramm und ein gespaltenes Säulendiagramm an.



Aufgabe 2: Es wird ein Elfmeter geschossen und es gibt 6 Platzierungsmöglichkeiten. Es wird ein zweites mal geschossen und der/die Torhüter*in weiß, dass der Schuss nicht gleich platziert wird wie der erste. Berechne in Deinem Heft die Trefferwahrscheinlichkeiten für beide Schüsse. Ändern sich die Wahrscheinlichkeiten? Begründe Deine Antwort.

Abbildung 5: Arbeitsblatt 2: „Elfmeterschießen – Alles nur Zufall?“ (gesamte Darstellung des Arbeitsblatts, sowie Kopiervorlage für Spielmaterialien im Anhang)

4.3.5 Erarbeitung 2

In dieser Unterrichtsphase werden zu Beginn die auf der Vorderseite des Arbeitsblatts platzieren Merkkästen befüllt. Die Lehrkraft nutzt dabei das Smart-Board zu Visualisierungszwecken. Es werden die Merksätze an das Smart-Board geschrieben und die Schüler*innen haben die Aufgabe, diese korrekt auf das eigene Arbeitsblatt zu übernehmen. Im Sinne der Erreichung der Lernziele 2 bis 4 ist es von hoher Relevanz, dass die Merksätze nicht nur übernommen werden, sondern dass diese auch in den Kontext der Arbeitsaufträge gesetzt werden. Es werden die folgenden Merksätze auf dem Arbeitsblatt vermerkt, wobei die Schlüsselbegriffe unterstrichen werden:

1. Zufallsexperimente sind Experimente, die...
 - a. ... kontrolliert verlaufen,
 - b. ... unter gleichen Bedingungen wiederholbar sind und
 - c. ... deren Ausgang nicht vorhersagbar ist

2. Alle möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments nennt man „mögliche Ergebnisse“. Die Ausgänge, deren Wahrscheinlichkeit wir untersuchen nennt man „günstige Ergebnisse“.
3. Man berechnet die Wahrscheinlichkeit günstiger Ergebnisse bei mehrfach hintereinander ausgeführten Zufallsexperimenten durch Multiplikation.
Beispiel: Trefferwahrscheinlichkeit, dass 3 Elfmeter hintereinander getroffen werden mit $P = 70\%$

$$\frac{7}{10} * \frac{7}{10} * \frac{7}{10} = \frac{343}{1000} = 0,343 = 34,3 \%$$

Sobald die Schüler*innen die Merksätze korrekt übernommen haben, dürfen sich diese dem Elfmeter-Spiel widmen. Da die Regeln des Spiels bereits in der Gelenkstelle besprochen wurden und diese auch auf dem Arbeitsblatt festgehalten sind, dürfte kein weiterer Klärungsbedarf bestehen. Die Schüler*innen spielen das Elfmeter-Spiel und halten ihr Ergebnis auf der Rückseite des Arbeitsblatts fest. Der Gegenstand des Ergebnisaufzeichnens schafft in tabellarischer Form die Basis für eine spätere Datenauswertung unter gezielter Verwendung der Begriffe „mögliche und günstige Ergebnisse“. Bei dem Elfmeter-Spiel erhalten die Schüler*innen jeweils einen Briefumschlag mit je 6 Kärtchen, die die Platzierung des Elfmeters, beziehungsweise die verteidigte Ecke durch den/die Torhüter*in darstellt. Die Schüler*innen verteilen die 6 Spielkarten verdeckt vor sich und ziehen zeitgleich eine der 6 Spielkarten. Stimmt die Platzierung der nicht Symbole überein, so wird dieses Ergebnis als Treffer gewertet und entsprechend vermerkt. Sollte die Platzierung der Symbole übereinstimmen, gilt es dies entsprechend als Fehlschuss zu vermerken. Dieser Prozess wird fünffach wiederholt, bis die Tabelle vollständig ausgefüllt ist. Die Lehrkraft hat dabei die Aufgabe, durch die Klasse zu gehen und den Spielprozess einzelner Gruppen zu beobachten und bei Unklarheiten Fragen zu beantworten.

Schüler*innen, die besonders schnell durch die Erarbeitung kommen, sollen sich bereits mit der anstehenden Hausaufgabe auseinandersetzen. Die Aufgabenstellung befindet sich ebenfalls auf der Rückseite des Arbeitsblatts und stützt sich auf die erhobenen und dokumentierten Daten des Elfmeter-Spiels. Die Schüler*innen haben die Aufgabe, die erhobenen Daten des Spielausgangs in ein Kreis- und ein gespaltenes Säulendiagramm zu übertragen. Da diese eine sehr

niederschwellige Aufgabenstellung ist, gibt es keinen Bedarf für eine weitere Ergebnissicherung. Wenn auch diese Aufgabe bereits abgeschlossen ist, dürfen sich die Schüler*innen mit der abschließenden Aufgabe des Arbeitsblatts befassen, welche sonst als Hausaufgabe zu erledigen ist und den Anschlusspunkt in der nächsten Stunde darstellt. Bei der abschließenden Aufgabe geht es darum, ein fiktiv kreierte Szenario in Anlehnung an den Modellierungskreislauf und durch die bereitgestellten mathematischen Kenntnisse aus dem dritten Merkkasten des Arbeitsblatts 2 zu lösen. Es wird ein zweistufiges Zufallsexperiment beschrieben, bei dem sich die Trefferwahrscheinlichkeiten ändern. Die Aufgabenstellung lautet wie folgt: „Es wird ein Elfmeter geschossen und es gibt 6 Platzierungsmöglichkeiten. Es wird ein zweites Mal geschossen und der/die Torhüter*in weiß, dass der Schuss nicht gleich platziert wird wie der erste. Berechne in Deinem Heft die Trefferwahrscheinlichkeiten des ersten Schusses, des zweiten Schusses und die Wahrscheinlichkeit, dass beide Schüsse Treffer sind.“ Für die gesamte Bearbeitung haben die Schüler*innen 20 Minuten Zeit. Schüler*innen, die ein höheres Arbeitstempo haben, sind in der Lage alle Aufgaben des Arbeitsblatts in der vorgegebenen Zeit zu erledigen, während die etwas langsameren Schüler*innen eventuell Teilaufgaben als Hausaufgabe erledigen müssen.

4.3.6 Abschluss

Die Ergebnissicherung der beiden Arbeitsaufträge findet in der nächsten Unterrichtsstunde statt. Durch eine kritische Auseinandersetzung mit der Thematik und durch gezieltes Erfragen von Informationen durch die Lehrkraft kann das gewonnene Verständnis für Zufallsexperimente in der Folgeeinheit vertieft werden. Im Zuge des 10-minütigen Abschlusses werden die Lernziele und deren Erreichung durch gezieltes Erfragen durch die Lehrkraft in einer Podiumsdiskussion überprüft. Durch die im ganzen Unterrichtsverlauf bestehende Transparenz darüber, was der Unterrichtsgegenstand ist, schließt sich für die Schüler*innen der Kreis dank des Besprechens der Lernziele und ein logischer Aufbau wird erkannt. Dieser Effekt wird erzielt durch das Zusammenfassen der inhaltsbezogenen Kompetenzen durch die Schüler*innen. Dabei gilt es besonders auf die korrekte Verwendung der Fachsprache zu achten und bei Missachtung dieser, soll die Lehrkraft die Schüler*innen umgehend korrigieren.

4.4 Unterrichtsskizze 2: inhaltsbezogene Unterkompetenz 14

4.4.1 Allgemeines und Lernziele

Die zweite Unterrichtseinheit findet in direktem Anschluss an die erste Unterrichtseinheit statt und thematisiert die inhaltsbezogene Unterkompetenz 14, welche Wahrscheinlichkeiten im Rahmen von Laplace-Experimenten beinhaltet. Sie ist mit 45 Minuten angesetzt und die Schüler*innen lernen in ihr unterschiedliche fußballtypische Situationen kennen, die mittels des Wahrscheinlichkeitsbegriffs der Laplace-Wahrscheinlichkeiten analysiert und evaluiert werden können. Die Lernziele, welche in der Unterrichtseinheit erreicht werden sollen, enthalten Operatoren aller Anforderungsbereiche, wodurch ein tiefgreifendes Wissen unabhängig des Niveaus einzelner Schüler*innen erlangt werden soll. Sie sind wie folgt definiert:

1. Die Kompetenzen, die die Schüler*innen in der ersten Unterrichtseinheit erworben haben, werden durch deren Anwendung weiter vertieft. (10 – 13)
2. Die Schüler*innen berechnen Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen bei Laplace-Experimenten. Die berechneten Wahrscheinlichkeiten werden verglichen und bewertet. (14)

4.4.2 Einstieg und Ergebnissicherung

Es werden die Erkenntnisse der vorangegangenen Einheit vorausgesetzt, um dieser folgen zu können. Es empfiehlt sich, dass die Lehrkraft Lösungsblätter anfertigt und diese den Schüler*innen austeilte, die die erste Einheit verpasst haben. Als Unterrichtseinstieg werden im direkten Anschluss an die Begrüßung die Ergebnisse der Hausaufgaben von Arbeitsblatt 2 im Plenum besprochen. Das Hausaufgaben-Lösungsblatt soll für die abwesenden Schüler*innen erst im Anschluss an die Besprechung ausgeteilt werden, um die Aufmerksamkeit so aufrecht wie nur möglich zu halten. Das bereits entstandene Wissen aus der vorangegangenen Einheit soll durch die Besprechung weiter gefestigt werden und als inhaltlicher Anker dienen. Es werden die Aufgaben 1 und 2 auf der Rückseite des Arbeitsblatts 2 besprochen. Zu Beginn sollen 3 Schüler*innen ihre Diagramme durch die gegebenen Visualisierungsmöglichkeiten, wie beispielsweise eine Dokumentenkamera, präsentieren. Die Schüler*innen haben aufgrund der abweichenden Datenlage, entstammend aus dem Elfmeter-Spiel, unterschiedliche Ergebnisse. Dass die abweichende Datenlage der Grund hierfür ist und welche

Konsequenzen dieses Erkenntnis für Wahrscheinlichkeitsaussagen grundsätzlich hat, wird durch gezieltes Erfragen durch die Lehrkraft erzielt. Bei der Besprechung der zweiten Aufgabe der Hausaufgabe sollen mindestens 3 Schüler*innen ihre Ergebnisse der Berechnungen zur Plenumsdiskussion beisteuern. Die Lehrkraft erfragt den Lösungsweg von einem/einer der Schüler*innen, die eine korrekte Lösung präsentiert hat und hält den Lösungsweg an dem Smart-Board fest. Die Schüler*innen sollen die korrekten Lösungswege in ihr Arbeitsblatt übernehmen, sollten fehlerhafte Berechnungen vorliegen. Die korrekten Lösungen für die Berechnung sind die Folgenden:

Aufgabe 2:

$$P_{Treffer\ 1} = \frac{5}{6} = 0,833 = 83,3\ %$$

$$P_{Treffer\ 2} = \frac{4}{5} = 0,8 = 80\ %$$

$$P_{beide\ Treffer} = \frac{5}{6} * \frac{4}{5} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0,667 = 66,7\ %$$

Für die Ergebnissicherung der Hausaufgabe sind 10 Minuten angesetzt.

Im Anschluss an die Ergebnissicherung wird in einer 5-minütigen Gelenkstelle die nächste Erarbeitungsphase eingeleitet. Hierfür wird das Arbeitsblatt 3 „Laplace-Experimente im Fußball“ an das Smart-Board projiziert und dessen Bearbeitung besprochen. Durch die Besprechung soll Transparenz über den Unterrichtsgegenstand hergestellt und durch das Beantworten möglicher Nachfragen Klarheit geschaffen werden. Bevor die Lehrkraft das Arbeitsblatt austellt, wird die Uhrzeit, zu der die Erarbeitungsphase endet an das Smart-Board geschrieben, sodass die Schüler*innen einen zeitlichen Überblick über die Unterrichtsstunde haben. Auch die Sozialform der Einzelarbeit wird im Vorfeld besprochen. Durch ein ruhiges Arbeitsumfeld soll es auch schwächeren Schüler*innen gelingen, sich in die Thematik einzudenken und entsprechende Ergebnisse zu liefern. Die angemessene Arbeitsatmosphäre mit möglichst wenig Störungen ist auch deshalb notwendig, da die Übungsaufgaben des Arbeitsblatts 3 Operatoren aller Anforderungsbereiche enthalten und somit vereinzelt komplexer sind.



Datum: _____



Datum: _____

Laplace-Experimente im Fußball

Bearbeite die Aufgaben 1 bis 3 auf der Rückseite

Aufgabe 1: Vor jedem Fußballspiel wird per Münzwurf entschieden, welche Mannschaft Anstoß hat.

- Berechne die Wahrscheinlichkeit, den Münzwurf zu gewinnen.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, den Münzwurf 3 Mal in Folge zu gewinnen.
- Verändern sich die Wahrscheinlichkeiten des Münzwurfes? Begründe die abweichenden Ergebnisse von a) und b).

Aufgabe 2: Die Gruppenphase der Europameisterschaft 24 wurde ausgelost. Es gibt 4 Lostöpfe mit je 6 Mannschaften. Deutschland ist im Lostopf 1, Österreich ist im Lostopf 2, Niederlande ist im Lostopf 3 und Italien ist im Lostopf 4.

- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Deutschland auf Österreich in der Gruppenphase trifft.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Deutschland auf Österreich und die Niederlande in der Gruppenphase trifft.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Deutschland auf die Niederlande und Italien in der Gruppenphase trifft.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Deutschland auf Österreich, die Niederlande und Italien in der Gruppenphase trifft.

Aufgabe 3: Du dribbelst gemeinsam mit einem/einer Mitspieler*in auf den/die Torhüter*in zu. Wenn Du selbst schließt, erzielst Du zu 80% ein Tor. Du kannst auch anstatt selbst zu schießen, einen Pass zu deinem Mitspieler spielen. Der Pass kommt zu 90% an und Dein/Deine Mitspieler*in erzielt zu 90% ein Tor.

- Begründe durch Berechnung, ob Du einen Pass spielst oder selbst schließt.
- Verändert sich Deine Entscheidung, wenn du zu 85% triffst? Begründe deine Antwort

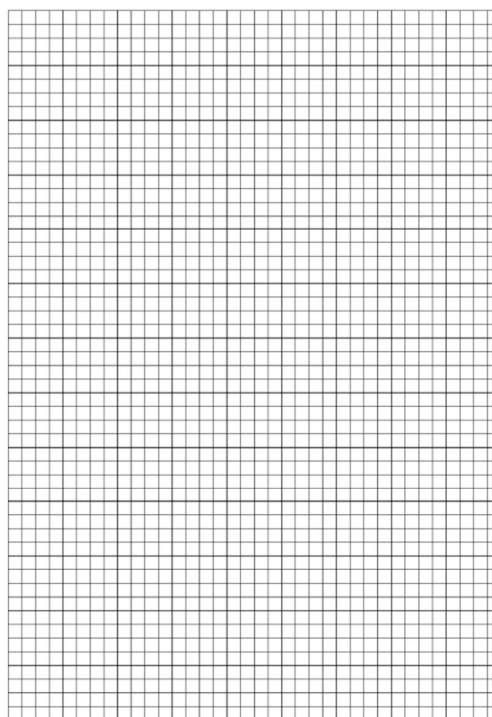


Abbildung 6: Arbeitsblatt 3 "Laplace-Experimente im Fußball" (gesamte Darstellung des Arbeitsblatts im Anhang)

4.4.3 Erarbeitung

Zu Beginn der 15-minütigen Erarbeitung wird die Definition, inklusive der allgemeinen Formel zur Berechnung von Laplace-Experimenten durch die Lehrkraft am Smart-Board festgehalten. Die Schüler*innen übernehmen den Inhalt korrekt auf ihr Arbeitsblatt in den Merkkasten wie folgt: „Laplace-Experimente sind Zufallsexperimente, bei denen die Eintrittswahrscheinlichkeiten aller möglichen Ergebnisse gleich ist.“

$$P = \frac{1}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Durch das Unterstreichen der Schlüsselbegriffe sollen die Schüler*innen ihr bereits entstandenes Begriffsnetz im Bereich der inhaltsbezogenen Kompetenz Daten und Zufall vertiefen und die Begriffe in einen Kontext zu den bisherigen Inhalten setzen. Bevor die Schüler*innen mit den Arbeitsaufträgen 1 bis 3 beginnen, wird erneut das Elfmeter-Spiel der vorangegangenen Unterrichtseinheit aufgegriffen. Die Lehrkraft klärt in einer Plenumsdiskussion, ob das Elfmeterschießen die nötigen Charakteristika von Laplace-Experimenten erfüllt. Die Schüler*innen

sollen die Erkenntnisse auf dem Arbeitsblatt zusätzlich im Merkkasten in Klammern nach der Formel als Beispiel festhalten.

Die Schüler*innen bearbeiten nun in Einzelarbeit und unter Verwendung eines Taschenrechners die Aufgaben 1 bis 3. Während der gesamten Erarbeitungsphase hat die Lehrkraft die Aufgabe durch die Klasse zu laufen, den Bearbeitungsfortschritt der Schüler*innen zu beobachten und bei entstandenen Fragen Hilfestellung bereitzustellen. Bei der ersten Aufgabe geht es um die Analyse des Münzwurfs vor einem Fußballspiel, bei dem entschieden wird, welches Team Anstoß hat. Es sollen die Wahrscheinlichkeiten eines erfolgreichen Münzwurfes und anschließend dreier erfolgreicher Münzwürfe hintereinander berechnet werden. Die abweichenden Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der beschriebenen Ereignisse soll begründet werden durch die Merksatzanwendung von mehrstufig ausgeführten Zufallsexperimenten. Diesen Merksatz kennen die Schüler*innen von der vorangegangenen Unterrichtseinheit. Das Vorwissen wird dadurch aktiviert, was zur Kontextualisierung der aktuellen Einheit beiträgt.

Aufgabe 2 handelt von der Auslosung der Gruppenphase der Fußball-Europameisterschaft 2024 in Deutschland. Dabei werden Eintrittswahrscheinlichkeiten unterschiedlicher Gruppenkonstellationen berechnet. Es gibt 4 Lostöpfe mit je 6 Nationen – es werden folglich 6 Gruppen mit je 4 Teilnehmern ausgelost. Die zweite Aufgabe stellt aufgrund der größeren Menge an zu verarbeitenden Informationen eine größere Herausforderung dar als die erste Aufgabe. Die Schüler*innen sollten jedoch in der Lage sein, diesen Arbeitsauftrag in selbstständiger Arbeit zu erledigen. Trotz des realisierbaren Schwierigkeitsgrades der Aufgabe ist es die Aktivität der Lehrkraft bei der Einzelarbeit gegebenenfalls durch Hilfestellung zu assistieren.

Die dritte Aufgabe beschreibt eine fußballtypische Spielsituation: zwei Spieler*innen laufen gemeinsam auf das Tor mit Torhüter*in zu. Die Kernfrage, die Fußballer*innen nun weltweit beschäftigt ist, ob der Pass zum/zur Mitspieler*in nötig ist, oder man selbst den Torabschluss sucht unter der Gefahr dass der/die Torhüter*in den Schuss pariert. Eine pauschal korrekte Antwort auf diese Fragestellung gibt es nicht, da der potenzielle Torerfolg unter anderem von der Leistungsfähigkeit der Spieler*in und vielen anderen undefinierbaren Faktoren abhängt. Im

Sinne der didaktischen Reduktion wird jedoch durch vorgegebene Wahrscheinlichkeiten für einen Torerfolg in den beiden beschriebenen Szenarien die Spielsituation analysiert. Auch wenn das Unterrichtsfach die Mathematik ist, spielt bei dieser Aufgabe ein gewisses Verständnis über die Situation im Sinne des Fußballs fernab der Mathematik eine tragende Rolle. Sollte die Lehrkraft bemerken, dass die Schüler*innen massive Probleme bei der Bearbeitung der Aufgabe haben, wird die Aufgabe in einer Plenumsdiskussion in Anlehnung an den Modellierungskreislauf gemeinsam im Anschluss an die Ergebnissicherung der ersten beiden Aufgaben bearbeitet.

4.4.4 Ergebnissicherung

Sollten die Schüler*innen keine massiven Bearbeitungsprobleme beim dritten Arbeitsauftrag haben, werden die Ergebnisse der Aufgaben 1 bis 3 in einer Plenumsdiskussion innerhalb von 10 Minuten gesichert. Die Lehrkraft hält die korrekten Lösungen am Smart-Board fest und die Schüler*innen übernehmen diese, sofern sie nicht bereits das richtige Ergebnis notiert haben. Durch die Sicherung der Ergebnisse und das eventuelle Beantworten aufgekommener Fragen der Schüler*innen wird die Erreichung des Lernziels zur inhaltlichen Unterkompetenz 14 gewährleistet. Die Lehrkraft soll bei der Lösungspräsentation der Schüler*innen auf eine korrekte Verwendung von Fachsprache achten und diese im Falle der Missachtung umgehend korrigieren. Die Lösungen der Aufgaben 1 bis 3 sind die Folgenden:

Aufgabe 1:

a) $\frac{1}{2} = 0,5 = 50 \%$

b) $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5 \%$

c) *Die Wahrscheinlichkeiten der Münzwürfe bleibt mit $P = 50\%$ gleich. Die abweichenden Werte entstehen deshalb, weil bei b) die Mehrfachausführung eines Zufallsexperiment dargestellt wird*

Aufgabe 2:

a) $\frac{1}{6} = 0,167 = 16,7 \%$

b) $\frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0,028 = 2,8 \%$

$$c) \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0,028 = 2,8 \%$$

$$d) \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{216} = 0,005 = 0,5 \%$$

Aufgabe 3:

$$a) P_{Schus} = 80 \%$$

$$P_{Pass} = \frac{9}{10} * \frac{9}{10} = \frac{81}{100} = 0,81 = 81 \%$$

Es sollte gepasst werden

b) Wenn ich zu 85 % selbst treffe, sollte ich selbst schießen, da $P_{Schus} > P_{Pass}$

4.4.5 Abschluss

Bevor die Schüler*innen verabschiedet werden, wird die Unterrichtsstunde nochmals in 5 Minuten reflektiert. Neben der fachlichen Betrachtung, welche in einer Plenumsdiskussion durch Beiträge mehrerer Schüler*innen zusammengefasst wird, gibt die Lehrkraft den Schüler*innen Feedback in Anbetracht der Sozialform der Einzelarbeit. Durch die Zusammenfassung der erworbenen Kompetenzen wird ein hohes Maß an Transparenz gewährleistet. Im Idealfall erkennen die Schüler*innen, dass die Unterrichtseinheiten aufeinander aufbauen und nehmen dies als motivationalen Anreiz, das erlangte Wissen in der nächsten Unterrichtseinheit weiter zu vertiefen.

4.5 Unterrichtsskizze 3: inhaltsbezogene Unterkompetenzen 15 und 17

4.5.1 Allgemeines und Lernziele

Im Rahmen der abschließenden Unterrichtseinheit werden die inhaltlichen Unterkompetenzen 15 und 17 erworben. Die Schüler*innen lernen, anknüpfend an die vorangegangenen Unterrichtseinheiten, die Betrachtung eines Ereignisses unter Verwendung des Gegenereignisses kennen. Außerdem erwerben die Schüler*innen Kompetenzen im Umgang mit dem Gesetz der großen Zahl um die gesamte Bandbreite des Kapitels „Wahrscheinlichkeiten verstehen und berechnen“ abzudecken. Bei der Erarbeitung des Gesetzes der großen Zahl wird zur Unterstützung in mit der dynamischen Geometriesoftware „GeoGebra“ gearbeitet. Die notwendigen Darstellungen müssen im Vorfeld durch die Lehrkraft vorbereitet werden, sodass für die Schüler*innen so wenig Leerlauf wie möglich entsteht. Die Verwendung der Software dient allerdings nur Visualisierungszwecken. Um einen

gezielten Umgang der Schüler*innen mit der Software im Sinne eines weiteren Kompetenzerwerbs gewährleisten zu können, braucht es eine eigene Unterrichtseinheit, da diese auch durch die Limitierung technischer Möglichkeiten in höherem Aufwand steht. Entscheidend über alle Unterrichtseinheiten hinweg ist die Verknüpfung des vorhandenen Wissens und die Einbettung der neuen Kompetenzen in das vorhandene Wissen. Wird dies erreicht, so kann das Wissen die sportartspezifische Barriere durchbrechen und sowohl auf andere Sportarten übertragen als auch losgelöst von Sport betrachtet werden. Hierfür muss die Lehrkraft allerdings Zeit einplanen. Es kann nicht vorausgesetzt werden, dass die Schüler*innen, unabhängig des individuellen Niveaus in der Lage sind, diesen Transfer ohne weitere Betrachtung im Unterricht herzustellen. Für die abschließende Unterrichtseinheit sind 45 Minuten angesetzt und die Lernziele sind die Folgenden:

Lernziele:

1. Die Schüler*innen identifizieren bei Wahrscheinlichkeitsaussagen das Gegenereignis. Sie berechnen unter Verwendung des Gegenereignisses Wahrscheinlichkeiten und interpretieren deren Ergebnisse. (15)
2. Die Schüler*innen wenden das Gesetz der großen Zahl zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten an und begründen die Notwendigkeit des empirischen Vorgehens. (17)
3. Die Schüler*innen kennen einfache Möglichkeiten der statistischen Aufarbeitung vom Fußball und sind in der Lage, die erworbene Kenntnisse sowohl auf andere Sportarten als auch auf Themengebiete fernab des Sports zu übertragen.

4.5.2 Einstieg

Zu Beginn des Unterrichts berichtet die Lehrkraft nach der Begrüßung über ein Schulturnier, bei dem Klassen gegeneinander im Elfmeterschießen angetreten sind. Ohne zu weit auszuschwenken, wird in einer Plenumsdiskussion besprochen, von welchen Faktoren der Erfolg beim Elfmeterschießen abhängt. Die Schüler*innen werden sowohl sportliche Fähigkeit als auch sportpsychologische Faktoren nennen. Die genannten Faktoren werden von der Lehrkraft entsprechend geordnet am Smart-Board festgehalten. Sollten die Schüler*innen die

Torhüterleistung nicht als Faktor nennen, schreibt die Lehrkraft diesen selbstständig an das Smart-Board und hebt ihn farblich von den anderen Faktoren ab. Durch diesen angeleiteten Perspektivwechsel lernen die Schüler*innen, Gegenereignisse zu identifizieren im Sinne des ersten Lernziels.

Im Folgenden wird das Arbeitsblatt 4 „Elfmeterturnier – Wahrscheinlichkeiten von Gegenereignissen und das Gesetz der großen Zahl“ an das Smart-Board projiziert und dessen Bearbeitung sowie die Sozialform der Erarbeitungsphase, die Einzelarbeit, besprochen. Aufgrund des Vorkommens aller Anforderungsbereiche durch die Operatoren der Lernziele gelten die Arbeitsaufträge als komplex. Deswegen sollen die Schüler*innen unabhängig ihres Niveaus eine angemessene Arbeitsatmosphäre erfahren dürfen, die ein lernförderliches Klima in geringer Lautstärke darstellt. Auch die Zeit, zu der die Erarbeitungsphase endet, wird an das Smart-Board durch die Lehrkraft geschrieben. So haben die Schüler*innen einen zeitlichen Überblick und es ist Transparenz über das Unterrichtsgeschehen hergestellt. Gegenstände des Arbeitsblattes sind auf der Vorderseite ein Merkkasten, in welchem vor der Bearbeitung der Arbeitsaufträge ein Merksatz über Gegenereignisse platziert wird und Arbeitsaufträge in Anlehnung an ein fiktives Elfmeterturnier. Auf der Rückseite befindet sich das benötigte Arbeitsmaterial für die zweite Erarbeitungsphase. Bei dieser lernen die Schüler*innen den Umgang mit dem Gesetz der großen Zahl, welcher abschließend in einem Merkkasten festgehalten wird. Die zweite Erarbeitungsphase findet im Plenum und unter Verwendung der Geometrie-Software GeoGebra statt. Für den Einstieg, inklusive Gelenkstelle zur Erarbeitungsphase sind 5 Minuten angesetzt.



Datum: _____



Datum: _____

Elfmeterturnier

Wahrscheinlichkeiten von Gegenereignissen

Das Elfmeterturnier: Bei einem Schulturnier treten die Klassen gegeneinander im Elfmeterschießen an. Es treten die Klasse 7a, 7b und 7c an und es werden immer 5 Elfmeter je Begegnung von beiden Teams geschossen. Die Ergebnisse sind die Folgenden:

Team 1	Team 2	Ergebnis
7a	7b	4 : 3
7a	7c	3 : 5
7b	7c	4 : 2

Aufgabe 1: Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten in Deinem Heft:

- a) Die Trefferwahrscheinlichkeiten der einzelnen Klassen je Spiel
b) Die Trefferwahrscheinlichkeiten der Teams im gesamten Turnierverlauf

Aufgabe 2: Ein Fehlschuss wird als gehaltener Elfmeter gewertet.

- a) Berechne in deinem Heft unter Verwendung des Gegenereignisses die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elfmeter nicht getroffen wird.
b) Welche Klasse hat die/den beste*n Torhüter*in? Begründe Deine Antwort in deinem Heft.

Das Gesetz der großen Zahl

Einstieg: Die Torhüter*innen stehen beim Elfmeterturnier im Fokus des Publikums. Durch gute Leistungen, können Torhüter*innen das Elfmeterturnier nahezu im Alleingang entscheiden. Ein Elfmeter wird dann gehalten, wenn die Torhüter*innen in die richtige Platzierungsmöglichkeit hechten.

Aufgabe: Johanna und Mehmet sind die Torhüter*in der 7a und der 7b. Da die beiden unbedingt das Turnier für ihre Klasse entscheiden wollen, kommen sie zu Dir und bitten Dich um Rat. In welche der 6 Platzierungsmöglichkeiten sollen sie am besten hechten?

n = 5 Schüsse			n = 50 Schüsse			n = 500 Schüsse		
Platzierung	Häufigkeit	P	Platzierung	Häufigkeit	P	Platzierung	Häufigkeit	P
1								
2								
3								
4								
5								
6								

Fazit: _____

Abbildung 7: Arbeitsblatt 4 „Elfmeterturnier – Wahrscheinlichkeiten von Gegenereignissen und das Gesetz der großen Zahl“ (gesamte Darstellung im Anhang)

4.5.3 Erarbeitung 1

Sobald die Schüler*innen das Arbeitsblatt erhalten haben, hält die Lehrkraft den Merkkasten zu Wahrscheinlichkeiten von Gegenereignissen und die dazugehörige Formel zur Berechnung an dem Smart-Board fest. Haben die Schüler*innen den Merksatz: „Zu jedem Ereignis E gibt es ein Gegenereignis $\bar{E}$. Die Wahrscheinlichkeit P eines Gegenereignisses $\bar{E}$ wird berechnet mit der Wahrscheinlichkeit des Ausgangsereignisses E durch: $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$ “, korrekt auf ihr Arbeitsblatt übernommen, bearbeiten sie in Einzelarbeit innerhalb von 10 Minuten die Aufgaben 1 und 2 auf der Vorderseite des Arbeitsblatts 4. Beide Aufgaben stützen sich auf ein fiktives Elfmeterturnier, dessen Ergebnisse in einer Tabelle festgehalten sind. Die Ergebnisse des Turniers stellen einen tabellarischen Datensatz dar, den die Schüler*innen zur Bearbeitung beider Aufgaben benötigen und hierfür die notwendigen Informationen entnehmen müssen. Die erste Aufgabe thematisiert eine Wiederholung der Betrachtung von günstigen und möglichen Ergebnissen in Form der Berechnung der Trefferquoten der einzelnen Mannschaften sowohl in einzelnen Spielen als auch im ganzen Turnierverlauf.

Dabei wird das Vorwissen aktiviert und die Grundlage zur Erreichung des Lernziels 1 gelegt. Ist das Vorwissen aktiviert mit der Erkenntnis, dass die Wahrscheinlichkeit des Ausgangsereignisses bekannt sein muss um die Eintrittswahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, oder andersherum, zu bestimmen, können die Schüler*innen Aufgabe 2 bearbeiten. Bei Aufgabe 2 sollen die Schüler*innen die Eintrittswahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, nämlich die Wahrscheinlichkeit eines Fehlschusses in Form einer Parade durch den/die Torhüter*in mithilfe der festgehaltenen Formel aus dem Merkkasten berechnen. Im Anschluss an die Berechnung sollen die Schüler*innen durch Verbalisierung ihrer Ergebnisse begründen, welche/welcher der Torhüter*innen im Elfmeterturnier der/die Beste war. Während der gesamten Arbeitsphase läuft die Lehrkraft durch die Klasse und beobachtet den Bearbeitungsfortschritt der Schüler*innen. Außerdem werden entstandene Zwischenfragen der Schüler*innen durch die Lehrkraft beantwortet. Durch das Laufen durch die Klasse zeigt die Lehrkraft Präsenz und behält stets den Kontakt zur gesamten Klasse.

4.5.4 Ergebnissicherung 1

Sobald die Schüler*innen die Vorderseite des Arbeitsblatts bearbeitet haben, werden die Ergebnisse der Aufgabe 1 mündlich in einer Plenumsdiskussion korrigiert. Da Aufgabe 1 lediglich die Wiederholung bereits bekannter Berechnungen darstellt, nutzt die Lehrkraft nur dann das Smart-Board, wenn einzelne Schüler*innen nicht das korrekte Ergebnis haben, um die korrekten Rechenwege an dem Smart-Board festzuhalten. Die Lehrkraft notiert in jedem Fall die Ergebnisse der Aufgabe 1b), da diese zur Berechnung der Aufgabe 2 benötigt werden. Für die gesamte Ergebnissicherung, inklusive Gelenkstelle zur nächsten Erarbeitungsphase sind 5 Minuten vorgesehen. Die Lösungen für Aufgabe 1 sind die Folgenden:

Aufgabe 1:

$$a) \text{ Spiel 1; Klasse 7a: } P = \frac{4}{5} = 0,8 = 80 \%$$

$$\text{Spiel 1; Klasse 7b: } P = \frac{3}{5} = 0,6 = 60 \%$$

$$\text{Spiel 2; Klasse 7a: } P = \frac{3}{5} = 0,6 = 60 \%$$

$$\text{Spiel 2; Klasse 7c: } P = \frac{5}{5} = 1 = 100 \%$$

$$\text{Spiel 3; Klasse 7b: } P = \frac{4}{5} = 0,8 = 80 \%$$

$$\text{Spiel 3; Klasse 7c: } P = \frac{2}{5} = 0,4 = 40 \%$$

$$\text{b) Klasse 7a: } \frac{7}{10} = 0,7 = 70 \%$$

$$\text{Klasse 7b: } \frac{7}{10} = 0,7 = 70 \%$$

$$\text{Klasse 7c: } \frac{7}{10} = 0,7 = 70 \%$$

*Begründung: Alle Torhüter*innen haben im Turnier die gleiche Quote an Elfm Metern gehalten. Folglich kann nicht festgestellt werden, welches Team die/den beste/besten Torhüter*in in der Mannschaft hat.*

Sind die Ergebnisse der Aufgabe 1b) am Smart-Board festgehalten, erfragt die Lehrkraft die Lösungswege der Aufgabe 2. Die Lehrkraft hält die Lösungswege fest und die Schüler*innen übernehmen die korrekte Lösung in ihr Heft, sollten sie abweichende Lösungen haben. Wichtig bei der Betrachtung von Wahrscheinlichkeiten des Gegenereignisses ist die Erkenntnis, dass hierfür die Eintrittswahrscheinlichkeit des Ausgangsereignisses bekannt sein muss. Die Lehrkraft muss durch gezieltes Erfragen und Wiederholen des festgehaltenen Merkkastens gewährleisten, dass die Schüler*innen dies verinnerlicht haben. Als Resultat der Ergebnissicherung wird das erste Lernziel in vollem Umfang erreicht. Die Ergebnisse der Aufgabe 2 sind die Folgenden:

Aufgabe 2:

$$\text{a) Klasse 7a: } 1 - P(E) = 1 - 0,7 = 0,3 = 30 \%$$

$$\text{Klasse 7b: } 1 - P(E) = 1 - 0,7 = 0,3 = 30 \%$$

$$\text{Klasse 7c: } 1 - P(E) = 1 - 0,7 = 0,3 = 30 \%$$

*b) Begründung: Alle Torhüter*innen haben im Turnier die gleiche Quote an Elfmetern gehalten. Folglich kann nicht festgestellt werden, welches Team die/den beste/besten Torhüter*in in der Mannschaft hat.*

Sind die Ergebnisse der beiden Aufgaben gesichert und eventuelle Nachfragen geklärt, stellt die Lehrkraft die Frage, ob es sein kann, dass wirklich alle

Torhüter*innen, entsprechend den Paraden-Quoten gleich gut sind. Sollten die Schüler*innen von selbst nicht den Impuls bringen, muss die Lehrkraft die Schüler*innen dort hinleiten, dass sie erkennen, dass der Datensatz mit 10 Schüssen je Torhüter*in ein kleiner ist und wir zu einer wirklichen Interpretation einen größeren Datensatz haben müssen. So wird die nächste Erarbeitungsphase, dessen Gegenstand das Gesetz der großen Zahl ist, eingeleitet.

4.5.5 Erarbeitung 2

Zu Beginn der zweiten Erarbeitungsphase werden die Erkenntnisse, dass der Datensatz nicht ausreichend groß ist, gebündelt und im Merkkasten auf der Rückseite des Arbeitsblatts 4 durch die Lehrkraft am Smart-Board festgehalten. Die Schüler*innen übernehmen den Inhalt des Merkkastens auf ihr Arbeitsblatt: „Das Gesetz der großen Zahl besagt, dass bei vielen Wiederholungen eines Zufallsexperiments der Durchschnitt der Ergebnisse immer näher an den tatsächlichen Erwartungswert heranrückt.“ Haben die Schüler*innen den Merksatz korrekt übernommen und wurden durch die Lehrkraft entstandene Rückfragen beantwortet, liest ein/eine Schüler*in den Einstieg und die dazugehörige Aufgabe auf der Rückseite des Arbeitsblatts vor. Während vorgelesen wird, kann die Lehrkraft die dynamische Geometrie-Software GeoGebra mit der vorbereiteten Darstellung öffnen. Die Aufgabe wird dann im Plenum gemeinsam erarbeitet.

Als erstes wird der Versuch mit 5 Schüssen durchgeführt. Und das Ergebnis entsprechend festgehalten. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit P wenden die Schüler*innen bereits bekanntes Wissen an. Die Ergebnisse werden am Smart-Board übernommen.

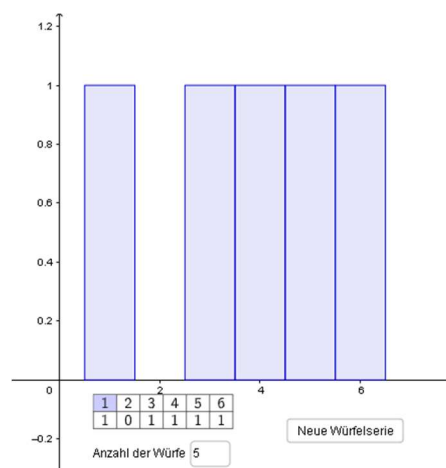


Abbildung 8: Häufigkeit bei $n = 5$ Schüssen mit GeoGebra

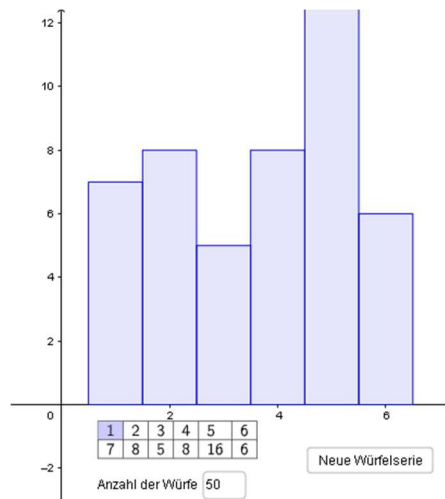


Abbildung 9: Häufigkeit bei $n = 50$ Schüsse mit GeoGebra

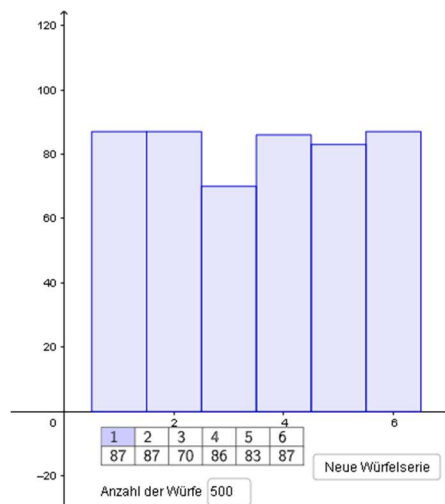


Abbildung 10: Häufigkeit bei $n = 500$ Schüsse

Den Schüler*innen sollte durch das wiederholte Ausführen der Anwendung mit steigenden Anzahlen an Schüssen auffallen, dass mit steigender Anzahl die Annäherung an den Schätzwert, 16,7% stattfindet. Diese Erkenntnis wird auch im Fazit am Ende des Arbeitsblatts 4 entsprechend festgehalten: „Je größer die Zahl der Schüsse ist, umso näher kommt man an den Erwartungswert von 16,7% je Platzierungsmöglichkeit. Es spielt folglich keine Rolle, wohin sich die Torhüter*innen hechten – es handelt sich um Zufall.“ Das Fazit wird durch die Lehrkraft am Smart-Board übernommen und durch Verinnerlichung und Beantwortung verbliebener Rückfragen das Lernziel 2 der Unterrichtseinheit erreicht. Für die zweite Erarbeitungsphase sind 10 Minuten angesetzt.

4.5.6 Abschluss

Im Rahmen des 10-minütigen Abschlusses erfragt die Lehrkraft im Rahmen einer Plenumsdiskussion, was die Schüler*innen über die letzten 4 Unterrichtseinheiten gelernt haben. Wünschenswert ist es, dass die Schüler*innen erkannt haben, dass nicht nur der Fußball, sondern auch andere Sportarten mathematisierbar sind und die erworbenen Kompetenzen sogar fernab des Sports angewendet werden können. Durch das Zusammenfassen der erworbenen Kompetenzen gewinnen die Schüler*innen einen Überblick über das gesamthafte Konzept der Unterrichtseinheit und festigen durch die Kontextualisierung des Sports mit der Mathematik die erworbenen Kompetenzen. Besonders ist für die Lehrkraft von Interesse, ob die Verbindung des Fußballs mit der Mathematik den Schüler*innen Spaß gemacht hat und ob sie sich diese öfter wünschen würden. Entsprechend dem Feedback kann dann die Lehrkraft gegebenenfalls häufiger den Bezug von der Freizeitaktivität zur Mathematik, im Sinne der Motivationssteigerung und einer verstärkten Tiefe des Kompetenzerwerbs in Anwendungsbezug herstellen (vgl. Reiss und Hammer 2021, S. 13ff.).

5 Fazit

Mit Sicherheit bietet die Verknüpfung von Fußball und Mathematik einen neuen Anreiz für Schüler*innen, welcher als Abwechslung zum klassischen Unterrichtsgeschehen empfunden wird. So kann eventuell bei den fußballbegeisterten Schüler*innen durch die beschriebene Verknüpfung ein tiefgreifender mathematischer Kompetenzerwerb erworben werden. Fraglich jedoch bleibt, wie sich das Konzept „Fußball-Mathematik“ auf die Schüler*innen auswirkt, welche keinen Zugang zum Fußball oder zum Sport generell haben. In der Hinsicht klafft besonders eine geschlechterspezifische Lücke. Während 76,83% der Jungen zwischen 7 und 14 in einem Sportverein als Mitglied aktiv sind, sind nur 57,8% der Mädchen in der gleichen Altersspanne Mitglied in einem Sportverein (vgl. Deutscher Olympischer Sportbund (DOSB) 2023, S. 17). Die Abweichung nach Geschlecht in sportlichen Aktivitäten der 7- bis 14-jährigen zeigt sich im Fußball besonders stark. Während 2023 über 1,1 Millionen Jungen im beschriebenen Altersbereich in einem Fußballverein aktiv sind, spielen lediglich circa 195.000 Mädchen Fußball (ebd., S. 5.). Im Zuge der Gestaltung der Unterrichtseinheit wurde diesbezüglich durch geschlechtsneutrale Formulierungen und durch Bezugnahme zu beiden Geschlechtern versucht, den negativen Auswirkungen durch Exklusion des weiblichen Geschlechtes präventiv entgegenzuwirken.

Die vorliegende Arbeit demonstriert in Bezug zur einleitend gestellten Forschungsfrage, dass die Integration fußballspezifischer Inhalte in den Mathematikunterricht die Relevanz und Attraktivität des Lernstoffs für die Schüler*innen erhöht. Die Verwendung von Beispielen aus der Fußballwelt, wie beispielsweise Wahrscheinlichkeitsberechnungen bei Elfmeterschießen oder statistischen Analysen von Spielergebnissen, veranschaulicht die Leitidee „Daten und Zufall“ für die Schüler*innen und macht sie greifbarer und interessanter. Die lebensweltbezogene Herangehensweise zielt darauf ab, die Motivation und das Interesse der Schüler*innen am Mathematikunterricht zu steigern. Es besteht jedoch weiterer Forschungsbedarf in zweierlei Hinsicht.

Zum einen muss die Unterrichtseinheit erprobt werden mit anschließender Evaluation, sodass gegebenenfalls aufgetretene Planungsfehler in der Zeit, Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Arbeitsmaterialien und der generelle Ablauf korrigiert werden können mit dem Ziel, einen reibungslosen und tiefgreifenden

Kompetenzerwerb der Schüler*innen zu ermöglichen. Wenn auch die Verknüpfung zur Motivationssteigerung beiträgt, ist noch nicht erforscht, ob die Verknüpfung sportbezogener Thematiken zu dem angestrebten tiefergreifenden Kompetenzerwerb beitragen. Das Ergebnis dieser Forschung ist elementar für Lehrkräfte, deren Kapazitäten bekanntermaßen bereits stark ausgereizt sind, da diese durch die Erstellung neuer Arbeitsmaterialien und neuer Unterrichtsskizzen einen erhöhten Planung- und Vorbereitungsaufwand haben. Neben der grundsätzlichen Notwendigkeit der Verknüpfung von Fußball und Mathematik kann auch der Zeitpunkt der Verwendung des „Fußball-Mathematik“-Konzepts untersucht werden. Es gibt noch keine Erkenntnisse darüber, ob das Konzept im Sinne der Unterrichtseffizienz zu Einführungszwecken neuer Thematiken geeignet ist, oder ob die vermutete positive Wirkung erst in späteren Übungsphasen entfaltet werden kann.

Abschließend gilt es anzumerken, dass die Verknüpfung des Fußballs mit der Mathematik in Rahmen des Unterrichts für die Sekundarstufe 1 über alle Klassenstufen hinweg eine Thematik darstellt, dessen weitere Erforschung eine spannende neue Perspektive auf die Gestaltung zeitgemäßen und modernen Mathematikunterrichts bieten kann.

Literaturverzeichnis

- Beckschulte, Catharina (2019): Mathematisches Modellieren Mit Lösungsplan. Eine Empirische Untersuchung Zur Entwicklung Von Modellierungskompetenzen. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH (Studien Zur Theoretischen und Empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik Ser).
- Bohr, Niels (1928): The Quantum Postulate and the Recent Development oh Atomic Theory. In: *Nature*, S. 580–590.
- Bosch, Karl (2007): Basiswissen Statistik. Einführung in die Grundlagen der Statistik mit zahlreichen Beispielen und Übungsaufgaben mit Lösungen. [3., vollst. überarb. Aufl.]. München: Oldenbourg. Online verfügbar unter <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1524/9783486710762/html>, zuletzt geprüft am 08.07.2024.
- Deutsche Fußball-Bund e.V. (DFB) (2024): Deutsche Meister. Online verfügbar unter <https://www.dfb.de/bundesliga/statistik/bisherige-meister/>, zuletzt aktualisiert am 14.04.2024, zuletzt geprüft am 08.07.2024.
- Deutscher Olympischer Sportbund (DOSB) (2023): Bestandserhebung 2023. Online verfügbar unter https://cdn.dosb.de/user_upload/www.dosb.de/u-ber_uns/Bestandserhebung/Bestandserhebung_2023.pdf, zuletzt aktualisiert am 01.11.2023, zuletzt geprüft am 08.07.2024.
- Einstein, Albert (1995], c1982): Ideas and opinions. New York, NY: Three Rivers Press.
- Hahn, Roger (2005): Pierre Simon Laplace 1749 - 1827. A determined scientist. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- Helmke, Andreas (2009): Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts ; Franz Emanuel Weinert gewidmet. Unter Mitarbeit von Franz E. Weinert. 1. Aufl. Seelze-Velber: Kallmeyer; Klett Kallmeyer.
- Henze, Norbert (2021): Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls. 13., überarbeitete und aktualisierte Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum (Lehrbuch). Online verfügbar unter

<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-662-63840-8.pdf>, zuletzt geprüft am 08.07.2024.

Klenke, Achim (2020): Wahrscheinlichkeitstheorie. 4., überarbeitete und ergänzte Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum (Masterclass).

Kuckartz, Udo (2010): Statistik. Eine verständliche Einführung. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften / GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden (SpringerLink Bücher).

Loos, Andreas; Sinn, Rainer; Ziegler, Günter M. (2022): Panorama der Mathematik. 1. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. Online verfügbar unter <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-662-54873-8.pdf>, zuletzt geprüft am 08.07.2024.

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport (2016): Mathematik. In: *Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe I - Bildungsplan 2016* (12). Online verfügbar unter https://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_SEK1_M.pdf, zuletzt geprüft am 08.07.2024.

Peterßen, Wilhelm H. (2004): Lehrbuch Allgemeine Didaktik. 6., völlig veränd., aktualisierte und stark erw. Aufl., [Nachdr.]. München: Oldenbourg (EGS-Texte).

Reiss, Kristina; Hammer, Christoph (2021): Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe. 2. Auflage. Cham: Birkhäuser (Springer eBook Collection).

Sill, Hans-Dieter (2019): Grundkurs Mathematikdidaktik. Paderborn: Ferdinand Schöningh (UTB Fachdidaktik, Schulpädagogik, Mathematik, 5008).

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 – Zusammenhang zwischen prozessbezogenen Kompetenzen, Leitideen (inhaltsbezogenen Kompetenzen) und Anforderungsbereichen (© Landesinstitut für Schulentwicklung): Ministerium für Kultus, Jugend und Sport (2016): Mathematik. In: *Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe I - Bildungsplan 2016* (12). Online verfügbar unter https://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_SEK1_M.pdf, zuletzt geprüft am 08.07.2024.

Abbildung 2 – Modellierungskreislauf nach Maaß (2005a): Beckschulte, Catharina (2019): Mathematisches Modellieren Mit Lösungsplan. Eine Empirische Untersuchung Zur Entwicklung Von Modellierungskompetenzen. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH (Studien Zur Theoretischen und Empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik Ser).

Abbildung 3 – Berliner Modell nach Paul Heimann (1962): Peterßen, Wilhelm H. (2004): Lehrbuch Allgemeine Didaktik. 6., völlig verändert., aktualisierte und stark erw. Aufl., [Nachdr.]. München: Oldenbourg (EGS-Texte)

Abbildung 4 – Arbeitsblatt 1: „Zufall und Wahrscheinlichkeiten im Fußball“ (eigene Erstellung)

Abbildung 5 – Arbeitsblatt 2: „Elfmeterschießen – Alles nur Zufall?“ (eigene Darstellung)

Abbildung 6 – Arbeitsblatt 3: „Laplace-Experimente im Fußball“ (eigene Darstellung)

Abbildung 7 – Arbeitsblatt 4 „Elfmeterturnier – Wahrscheinlichkeiten von Gegenereignissen und das Gesetz der großen Zahl“ (eigene Darstellung)

Abbildungen 8 bis 10 – GeoGebra-Datei „Simulation einer Würfelserie“ (erstellt von Schmidt, Reinhard, verfügbar unter: <https://www.geogebra.org/m/gGARj2UK>, zuletzt überprüft am 08.07.2024)

Anhang

Anhangsverzeichnis

Arbeitsblatt 1: Wahrscheinlichkeiten und Zufall im Fußball.....	I
Arbeitsblatt 2: Elfmeterschießen – Alles nur Zufall?.....	III
Spielmaterialien Elfmeter-Spiel.....	V
Arbeitsblatt 3: Laplace-Experimente im Fußball	VI
Arbeitsblatt 4: Elfmeterturnier – Wahrscheinlichkeiten von Gegenereignissen und das Gesetz der großen Zahl	VIII



Datum: _____

Merksätze/Erkenntnisse der Vorderseite

Arbeitsblatt 2: Elfmeterschießen – Alles nur Zufall?

Vorderseite



Datum: _____

Elfmeterschießen - Alles nur Zufall?

Elfmeter-Spiel

Durchführung/Regeln:

1. Jede*r Spieler*in nimmt sich einen Umschlag und wird Spieler*in oder Torhüter*in.
2. Mische die Spielkarten und breite sie verdeckt vor die aus.
3. Beide ziehen gleichzeitig eine Karte und vergleichen sie. Stimmen X und O überein, wurde kein Tor erzielt. Sind X und O an abweichenden Positionen, wurde ein Tor erzielt.
4. Dokumentiere den Spielfortschritt in der zugehörigen Tabelle auf der Rückseite.
5. Solltet Ihr vor Ablauf der Bearbeitungszeit fertig werden, könnt Ihr mit der Hausaufgabe beginnen.

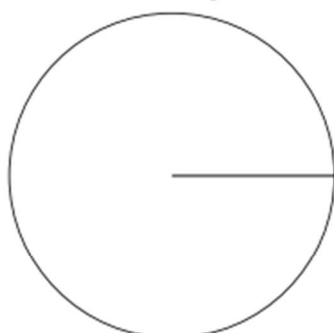


Datum: _____

Tabelle Elfmeter-Spiel	
Schuss	✓ Treffer oder kein Treffer ✕
Schuss 1	
Schuss 2	
Schuss 3	
Schuss 4	
Schuss 5	

Hausaufgabe

Aufgabe 1: Fertige auf der Basis der Tabelle Deines Elfmeter-Spiels ein Kreisdiagramm und ein gespaltenes Säulendiagramm an.

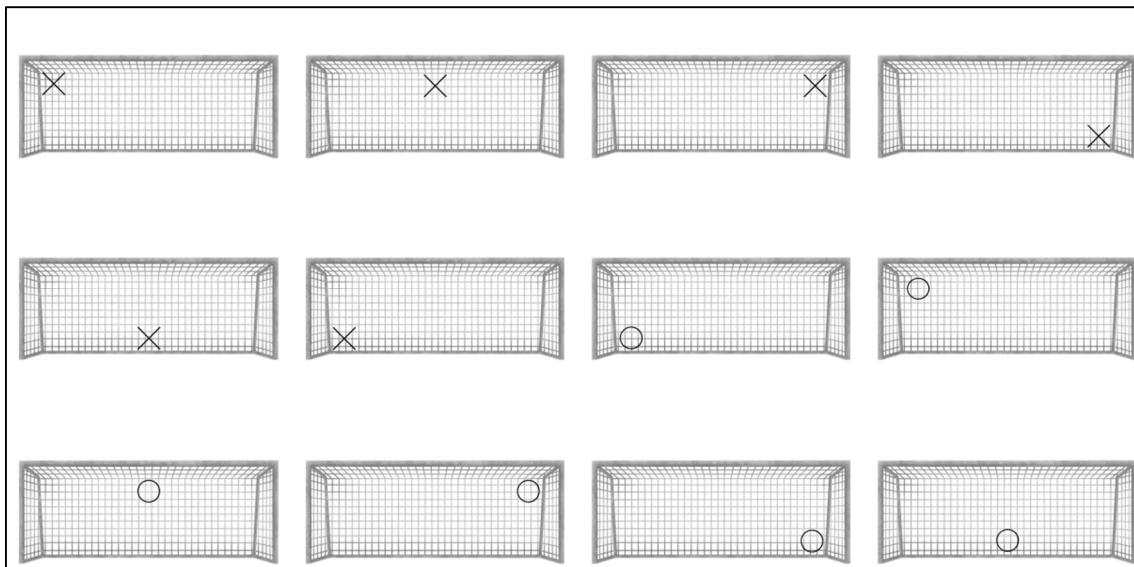


10 cm

Aufgabe 2: Es wird ein Elfmeter geschossen und es gibt 6 Platzierungsmöglichkeiten. Es wird ein zweites mal geschossen und der/die Torhüter*in weiß, dass der Schuss nicht gleich platziert wird wie der erste. Berechne in Deinem Heft die Trefferwahrscheinlichkeiten des ersten Schusses, des zweiten Schusses und die Wahrscheinlichkeit, dass beide Schüsse Treffer sind.

Spielmaterialien Elfmeter-Spiel

Kopiervorlage



Arbeitsblatt 3: Laplace-Experimente im Fußball

Vorderseite



Datum: _____

Laplace-Experimente im Fußball

Bearbeite die Aufgaben 1 bis 3 auf der Rückseite

Aufgabe 1: Vor jedem Fußballspiel wird per Münzwurf entschieden, welche Mannschaft Anstoß hat.

- Berechne die Wahrscheinlichkeit, den Münzwurf zu gewinnen.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, den Münzwurf 3 Mal in Folge zu gewinnen.
- Verändern sich die Wahrscheinlichkeiten des Münzwurfes? Begründe die abweichenden Ergebnisse von a) und b).

Aufgabe 2: Die Gruppenphase der Europameisterschaft 24 wurde ausgelost. Es gibt 4 Lostöpfe mit je 6 Mannschaften. Deutschland ist im Lostopf 1, Österreich ist im Lostopf 2, Niederlande ist im Lostopf 3 und Italien ist im Lostopf 4.

- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Deutschland auf Österreich in der Gruppenphase trifft.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Deutschland auf Österreich und die Niederlande in der Gruppenphase trifft.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Deutschland auf die Niederlande und Italien in der Gruppenphase trifft.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Deutschland auf Österreich, die Niederlande und Italien in der Gruppenphase trifft.

Aufgabe 3: Du dribbelst gemeinsam mit einem/einer Mitspieler*in auf den/die Torhüter*in zu. Wenn Du selbst schließt, erzielst Du zu 80% ein Tor. Du kannst auch anstatt selbst zu schießen, einen Pass zu deinem Mitspieler spielen. Der Pass kommt zu 90% an und Dein/Deine Mitspieler*in erzielt zu 90% ein Tor.

- Begründe durch Berechnung, ob Du einen Pass spielst oder selbst schließt.
- Verändert sich Deine Entscheidung, wenn du zu 85% triffst? Begründe deine Antwort

A full-page sheet of white graph paper featuring a uniform grid of thin black horizontal and vertical lines. The grid covers the entire area of the page, providing a template for drawing or writing.

Arbeitsblatt 4: Elfmeterturnier – Wahrscheinlichkeiten von Gegenereignissen und das Gesetz der großen Zahl

Vorderseite



Datum: _____

Elfmeterturnier Wahrscheinlichkeiten von Gegenereignissen

Das Elfmeterturnier: Bei einem Schulturnier treten die Klassen gegeneinander im Elfmeterschießen an. Es treten die Klasse 7a, 7b und 7c an und es werden immer 5 Elfmeter je Begegnung von beiden Teams geschossen. Die Ergebnisse sind die Folgenden:

Team 1	Team 2	Ergebnis
7a	7b	4 : 3
7a	7c	3 : 5
7b	7c	4 : 2

Aufgabe 1: Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten in Deinem Heft:

- Die Trefferwahrscheinlichkeiten der einzelnen Klassen je Spiel
- Die Trefferwahrscheinlichkeiten der Teams im gesamten Turnierverlauf

Aufgabe 2: Ein Fehlschuss wird als gehaltener Elfmeter gewertet.

- Berechne in deinem Heft unter Verwendung des Gegenereignisses die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elfmeter nicht getroffen wird.
- Welche Klasse hat die/den beste*n Torhüter*in? Begründe Deine Antwort in deinem Heft.



Datum: _____

Das Gesetz der großen Zahl

Einstieg: Die Torhüter*innen stehen beim Elfmeterturnier im Fokus des Publikums. Durch gute Leistungen, können Torhüter*innen das Elfmeterturnier nahezu im Alleingang entscheiden. Ein Elfmeter wird dann gehalten, wenn die Torhüter*innen in die richtige Platzierungsmöglichkeit hechten.

Aufgabe: Johanna und Mehmet sind die Torhüter*in der 7a und der 7b. Da die beiden unbedingt das Turnier für ihre Klasse entscheiden wollen, kommen sie zu Dir und bitten Dich um Rat. In welche der 6 Platzierungsmöglichkeiten sollen sie am besten hechten?

n = 5 Schüsse			n = 50 Schüsse			n = 500 Schüsse		
Platzierung	Häufigkeit	p	Platzierung	Häufigkeit	p	Platzierung	Häufigkeit	p
1								
2								
3								
4								
5								
6								

Fazit: _____

Eigenständigkeitserklärung

Eigenständigkeitserklärung



für Abschlussarbeiten



für schriftliche Modulprüfungsarbeiten

Name, Vorname: Morscher, Dustin Altemio
Matrikelnummer: 6311177
Studiengang: B.A. Lehramt Sekundarstufe I
Semester: Sommersemester 2024 (SS24)
1. Prüfer/in: Prof. Dr. Saskia Schreiter
2. Prüfer/in: Akad. Oberrat Lukas Hieber

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel

Fußball trifft auf Mathematik - Konzept für eine Unterrichtseinheit zur

Vermittlung von Wahrscheinlichkeit und Zufall durch Bezug zur direkten

Lebensrealität von Schüler*innen

selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe verfasst habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß übernommenen Textstellen als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen. Ebenfalls erkläre ich, dass ich noch keine Bachelor- oder Masterthesis in der gleichen oder einer vergleichbaren Studienrichtung endgültig nicht bestanden habe oder mich in einem laufenden Prüfungsverfahren befinde. Die Versicherung gilt auch für beigelegte Zeichnungen, Skizzen oder graphische Darstellungen.

Sollten in der Prüfungsstellung Chatbots oder andere Formen künstlicher Intelligenz (KI) ausdrücklich als Hilfsmittel erlaubt worden sein, versichere ich

- verstanden zu haben, dass diese generativen Sprachmodelle in ihrer Funktionsweise technisch auf dem Wahrscheinlichkeitsprinzip basieren und somit auch wissenschaftlich nicht korrekte Antworten vorliegen können
- alle Abschnitte kenntlich gemacht zu haben, für die Textmaterial aus Chatbots verwendet wurden
- in einer vollständigen Liste im Anschluss an das Literaturverzeichnis alle genutzten Tools, den Zeitpunkt des Zugriffs sowie den von mir jeweils eingegebenen Ausgangstext bzw. die Anfangsphrase („prompt“) dokumentiert zu haben
- verstanden zu haben, dass die Qualität der Antwort eines KI-Textmodells stark von der Qualität des „prompts“ abhängt und sich hierin auch die persönliche Leistung und Eigenständigkeit meiner Arbeit zeigen kann.



Dem ausgedruckten Text habe ich einen Datenträger mit der digitalisierten Version der Arbeit beigelegt.

Durch meine Unterschrift bestätige ich, dass die Datenschutzverordnung (EU-DSGVO) vom 27.04.2016 – insbesondere bei personenbezogenen Daten – in der vorliegenden Arbeit eingehalten wurde.

Schwäbisch Gmünd, den 15.07.2024

Ort, Datum

Unterschrift